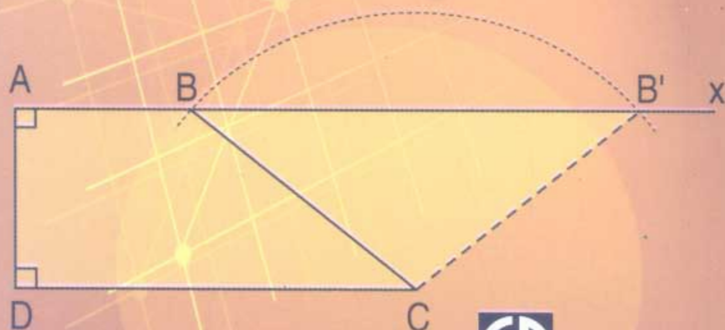
TÔN THÂN (Chủ biên) - VŨ HỮU BÌNH - TRẦN ĐÌNH CHÂU
PHẠM GIA ĐỨC - PHẠM ĐỨC QUANG - NGUYỄN DUY THUẬN

BÀI TẬP TOÁN 8

TẬP MỘT



$$\frac{20x^2 - 45}{(2x + 3)^2}$$





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TÔN THÂN (Chủ biên)
VŨ HỮU BÌNH - TRẦN ĐÌNH CHÂU
PHẠM GIA ĐỨC - PHẠM ĐỨC QUANG - NGUYỄN DUY THUẬN

Bài tập
TOÁN 8

TẬP MỘT

(Tái bản lần thứ bảy)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

01 - 2011/CXB/766 - 1235/GD Mã số : 2B803T1

LỜI NÓI ĐẦU

Trong những năm qua, bộ sách Bài tập Toán từ lớp 6 đến lớp 9 do chính các tác giả sách giáo khoa Toán THCS biên soạn đã được sử dụng kèm theo sách giáo khoa và đã mang lại những hiệu quả thiết thực. Bộ sách đã là một tài liệu bổ ích giúp các thầy, cô giáo có thêm tư liệu trong việc soạn giảng, giúp các em học sinh tự học, tự rèn luyện kĩ năng, qua đó củng cố được kiến thức cơ bản, hình thành phương pháp giải toán, tăng thêm khả năng vận dụng kiến thức và góp phần rèn luyện tư duy toán học.

Để đáp ứng tốt hơn nhu cầu ngày càng cao của các thầy, cô giáo và các em học sinh, chúng tôi tiến hành chỉnh lí và bổ sung bộ sách bài tập hiện có theo hướng tạo nhiều cơ hội hơn nữa để các em học sinh được củng cố kiến thức toán học cơ bản, được rèn luyện kĩ năng theo ***Chuẩn kiến thức, kĩ năng*** trong ***Chương trình Giáo dục phổ thông*** được Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành ngày 5 tháng 5 năm 2006. Nói chung, ở mỗi "xoắn" (§), cuối mỗi chương sẽ có thêm phần ***Bài tập bổ sung***. Trong phần này, có thể có các *câu hỏi trắc nghiệm khách quan* để các em học sinh tự kiểm tra, đánh giá mức độ nắm vững kiến thức của mình. Một số dạng bài tập chưa có trong sách giáo khoa cũng được bổ sung nhằm làm phong phú thêm các thể loại bài tập, giúp các em học sinh tập dượt vận dụng kiến thức trong nhiều tình huống khác nhau. Bộ sách cũng được bổ sung một số bài tập dành cho các em học sinh khá, giỏi. Những bài tập này được đánh dấu "*". Bên cạnh đó, các tác giả cũng chú ý chỉnh sửa cách diễn đạt ở một số chỗ cho thích hợp và dễ hiểu hơn.

Chúng tôi hi vọng rằng với việc chỉnh lí và bổ sung như trên, bộ sách Bài tập Toán từ lớp 6 đến lớp 9 sẽ góp phần tích cực hơn nữa trong việc nâng cao chất lượng dạy và học môn Toán ở các trường THCS trong cả nước, đáp ứng tốt hơn nữa nhu cầu đa dạng của các đối tượng học sinh khác nhau.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng song bộ sách khó tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các thầy, cô giáo và bạn đọc gần xa để trong các lần tái bản sau bộ sách được hoàn thiện hơn. Xin chân thành cảm ơn.

Hà Nội, tháng 10 năm 2009

CÁC TÁC GIẢ

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I
PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

ĐỀ BÀI

§1. Nhân đơn thức với đa thức

1. Làm tính nhân :

a) $3x(5x^2 - 2x - 1)$; b) $(x^2 + 2xy - 3)(-xy)$;

c) $\frac{1}{2}x^2y(2x^3 - \frac{2}{5}xy^2 - 1)$.

2. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $x(2x^2 - 3) - x^2(5x + 1) + x^2$; b) $3x(x - 2) - 5x(1 - x) - 8(x^2 - 3)$;

c) $\frac{1}{2}x^2(6x - 3) - x\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(x + 4)$.

3. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $P = 5x(x^2 - 3) + x^2(7 - 5x) - 7x^2$ tại $x = -5$;

b) $Q = x(x - y) + y(x - y)$ tại $x = 1,5$ và $y = 10$.

4. Chứng tỏ rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến :

a) $x(5x - 3) - x^2(x - 1) + x(x^2 - 6x) - 10 + 3x$;

b) $x(x^2 + x + 1) - x^2(x + 1) - x + 5$.

5. Tìm x, biết :

$2x(x - 5) - x(3 + 2x) = 26$.

Bài tập bổ sung

1.1. Làm tính nhân :

$$2x^2(5x^3 - 4x^2y - 7xy + 1).$$

1.2. Rút gọn biểu thức :

$$2x(3x^3 - x) - 4x^2(x - x^2 + 1) + (x - 3x^2)x.$$

§2. Nhân đa thức với đa thức

6. Thực hiện phép tính :

a) $(5x - 2y)(x^2 - xy + 1)$; b) $(x - 1)(x + 1)(x + 2)$;

c) $\frac{1}{2}x^2y^2(2x + y)(2x - y)$.

7. Thực hiện phép tính :

a) $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)(2x - 3)$; b) $(x - 7)(x - 5)$;

c) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(4x - 1)$.

8. Chứng minh :

a) $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$;

b) $(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)(x - y) = x^4 - y^4$.

9. Cho a và b là hai số tự nhiên. Biết a chia cho 3 dư 1 ; b chia cho 3 dư 2. Chứng minh rằng ab chia cho 3 dư 2.

10. Chứng minh rằng biểu thức $n(2n - 3) - 2n(n + 1)$ luôn chia hết cho 5 với mọi số nguyên n.

Bài tập bổ sung

2.1. Kết quả của phép tính $(x - 5)(x + 3)$ là :

(A) $x^2 - 15$; (B) $x^2 - 8x - 15$;

(C) $x^2 + 2x - 15$; (D) $x^2 - 2x - 15$.

Hãy chọn kết quả đúng.

2.2. Chứng minh rằng biểu thức $(n - 1)(3 - 2n) - n(n + 5)$ chia hết cho 3 với mọi giá trị của n.

§3, 4, 5. Những hằng đẳng thức đáng nhớ

11. Tính :

a) $(x + 2y)^2$; b) $(x - 3y)(x + 3y)$; c) $(5 - x)^2$.

12. Tính :

a) $(x - 1)^2$; b) $(3 - y)^2$; c) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

13. Viết các biểu thức sau dưới dạng bình phương của một tổng :

a) $x^2 + 6x + 9$; b) $x^2 + x + \frac{1}{4}$; c) $2xy^2 + x^2y^4 + 1$.

14. Rút gọn biểu thức :

a) $(x + y)^2 + (x - y)^2$;

b) $2(x - y)(x + y) + (x + y)^2 + (x - y)^2$;

c) $(x - y + z)^2 + (z - y)^2 + 2(x - y + z)(y - z)$.

15. Biết số tự nhiên a chia cho 5 dư 4. Chứng minh rằng a^2 chia cho 5 dư 1.

16. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $x^2 - y^2$ tại $x = 87$ và $y = 13$;

b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ tại $x = 101$;

c) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ tại $x = 97$.

17. Chứng minh rằng :

a) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) + (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 2a^3$;

b) $a^3 + b^3 = (a + b)[(a - b)^2 + ab]$;

c) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$.

18. Chứng tỏ rằng :

a) $x^2 - 6x + 10 > 0$ với mọi x ; b) $4x - x^2 - 5 < 0$ với mọi x.

19. Tìm giá trị nhỏ nhất của các đa thức :

a) $P = x^2 - 2x + 5$; b) $Q = 2x^2 - 6x$;

c) $M = x^2 + y^2 - x + 6y + 10$.

20. Tìm giá trị lớn nhất của các đa thức :

a) $A = 4x - x^2 + 3$; b) $B = x - x^2$; c) $N = 2x - 2x^2 - 5$.

Bài tập bổ sung

3.1. Cho $x^2 + y^2 = 26$ và $xy = 5$, giá trị của $(x - y)^2$ là :

(A) 4 ; (B) 16 ; (C) 21 ; (D) 36.

Hãy chọn kết quả đúng.

3.2. Kết quả của tích $(a^2 + 2a + 4)(a - 2)$ là :

(A) $(a + 2)^3$; (B) $(a - 2)^3$; (C) $a^3 + 8$; (D) $a^3 - 8$.

Hãy chọn kết quả đúng.

3.3. Rút gọn các biểu thức :

a) $P = (5x - 1) + 2(1 - 5x)(4 + 5x) + (5x + 4)^2$.

b) $Q = (x - y)^3 + (y + x)^3 + (y - x)^3 - 3xy(x + y)$.

3.4. Rút gọn biểu thức :

$$P = 12(5^2 + 1)(5^4 + 1)(5^8 + 1)(5^{16} + 1).$$

3.5. Chứng minh hằng đẳng thức

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a).$$

§6. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung

21. Tính nhanh :

a) 85.12,7 + 5.3.12,7 ; b) 52.143 – 52.39 – 8.26.

22. Phân tích thành nhân tử :

a) $5x - 20y$; b) $5x(x - 1) - 3x(x - 1)$;

c) $x(x + y) - 5x - 5y$.

23. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $x^2 + xy + x$ tại $x = 77$ và $y = 22$;

b) $x(x - y) + y(y - x)$ tại $x = 53$ và $y = 3$.

24. Tìm x, biết :

a) $x + 5x^2 = 0$; b) $x + 1 = (x + 1)^2$; c) $x^3 + x = 0$.

25. Chứng minh rằng : $n^2(n + 1) + 2n(n + 1)$ luôn chia hết cho 6 với mọi số nguyên n.

Bài tập bổ sung

6.1. Phân tích đa thức $x^2(x + 1) - x(x + 1)$ thành nhân tử ta được kết quả là :

(A) x ; (B) $x(x + 1)$; (C) $x(x + 1)x$; (D) $x(x - 1)(x + 1)$.

Hãy chọn kết quả đúng.

6.2. Tính nhanh giá trị các biểu thức

a) $97.13 + 130.0,3$.

b) $86.153 - 530.8,6$.

§7. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức

26. Phân tích thành nhân tử :

a) $x^2 - 9$; b) $4x^2 - 25$; c) $x^6 - y^6$.

27. Phân tích thành nhân tử :

a) $9x^2 + 6xy + y^2$; b) $6x - 9 - x^2$; c) $x^2 + 4y^2 + 4xy$.

28. Phân tích thành nhân tử :

a) $(x + y)^2 - (x - y)^2$; b) $(3x + 1)^2 - (x + 1)^2$;

c) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

29. Tính nhanh :

a) $25^2 - 15^2$; b) $87^2 + 73^2 - 27^2 - 13^2$.

30. Tìm x, biết :

a) $x^3 - 0,25x = 0$; b) $x^2 - 10x = -25$.

Bài tập bổ sung

7.1. Phân tích đa thức $4x^2 - 9y^2$ thành nhân tử ta có kết quả :

(A) $(2x - 3y)^2$; (B) $(2x - 4,5y)(2x + 4,5y)$;

(C) $(4x - 9y)(4x + 9y)$; (D) $(2x - 3y)(2x + 3y)$.

Hãy chọn kết quả đúng.

7.2. Tìm x, biết :

a) $4x^2 - 4x = -1$.

b) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 0$.

§8. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhóm hạng tử

31. Phân tích thành nhân tử :

a) $x^2 - x - y^2 - y$; b) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$.

32. Phân tích thành nhân tử :

a) $5x - 5y + ax - ay$; b) $a^3 - a^2x - ay + xy$;

c) $xy(x + y) + yz(y + z) + xz(x + z) + 2xyz$.

33. Tính nhanh giá trị của mỗi đa thức :

a) $x^2 - 2xy - 4z^2 + y^2$ tại $x = 6$; $y = -4$ và $z = 45$;

b) $3(x - 3)(x + 7) + (x - 4)^2 + 48$ tại $x = 0,5$.

Bài tập bổ sung

Phân tích thành nhân tử

8.1. a) $4x^2 - y^2 + 4x + 1$.

b) $x^3 - x + y^3 - y$.

§9. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách phối hợp nhiều phương pháp

34. Phân tích thành nhân tử :

a) $x^4 + 2x^3 + x^2$; b) $x^3 - x + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - y$;

c) $5x^2 - 10xy + 5y^2 - 20z^2$.

35. Phân tích thành nhân tử :

a) $x^2 + 5x - 6$; b) $5x^2 + 5xy - x - y$; c) $7x - 6x^2 - 2$.

36. Phân tích thành nhân tử :

a) $x^2 + 4x + 3$; b) $2x^2 + 3x - 5$; c) $16x - 5x^2 - 3$.

37. Tìm x, biết :

a) $5x(x - 1) = x - 1$; b) $2(x + 5) - x^2 - 5x = 0$.

38. Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Bài tập bổ sung

9.1. Phân tích đa thức $x^4 + 8x$ thành nhân tử ta được kết quả là :

(A) $x(x + 2)(x^2 + 4x + 4)$; (B) $x(x + 2)(x^2 + 2x + 4)$;

(C) $x(x + 2)(x^2 - 4x + 4)$; (D) $x(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

Hãy chọn kết quả đúng.

9.2. Phân tích đa thức $x^2 + x - 6$ thành nhân tử ta được kết quả là :

(A) $(x + 2)(x - 3)$; (B) $(x + 3)(x - 2)$;

(C) $(x - 2)(x - 3)$; (D) $(x + 2)(x + 3)$.

Hãy chọn kết quả đúng.

9.3. Tìm x, biết :

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$.

b) $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

§10. Chia đơn thức cho đơn thức

39. Làm tính chia :

a) $x^2yz : xyz$; b) $x^3y^4 : x^3y$.

40. Làm tính chia :

a) $(x + y)^2 : (x + y)$; b) $(x - y)^5 : (y - x)^4$;

c) $(x - y + z)^4 : (x - y + z)^3$.

41. Làm tính chia :

a) $18x^2y^2z : 6xyz$; b) $5a^3b : (-2a^2b)$; c) $27x^4y^2z : 9x^4y$.

42. Tìm số tự nhiên n để mỗi phép chia sau là phép chia hết :

a) $x^4 : x^n$; b) $x^n : x^3$;

c) $5x^ny^3 : 4x^2y^2$; d) $x^ny^{n+1} : x^2y^5$.

43. Tính giá trị của biểu thức sau :

$$(-x^2y^5)^2 : (-x^2y^5) \text{ tại } x = \frac{1}{2} \text{ và } y = -1.$$

Bài tập bổ sung

10.1. Làm tính chia :

a) $\left(\frac{5}{7}x^2y\right)^3 : \left(\frac{1}{7}xy\right)^3$.　　　b) $(-x^3y^2z)^4 : (-xy^2z)^3$.

10.2. Tính giá trị biểu thức $-(x^7y^5z)^2 : (-xy^3z)^2$ tại $x = 1$; $y = -10$; $z = 101$.

§11. Chia đa thức cho đơn thức

44. Thực hiện phép tính :

a) $(7.3^5 - 3^4 + 3^6) : 3^4$;　　　b) $(16^3 - 64^2) : 8^3$.

45. Làm tính chia :

a) $(5x^4 - 3x^3 + x^2) : 3x^2$;　　　b) $(5xy^2 + 9xy - x^2y^2) : (-xy)$;

c) $\left(x^3y^3 - \frac{1}{2}x^2y^3 - x^3y^2\right) : \frac{1}{3}x^2y^2$.

46. Tìm n để mỗi phép chia sau là phép chia hết (n là số tự nhiên) :

a) $(5x^3 - 7x^2 + x) : 3x^n$;

b) $(13x^4y^3 - 5x^3y^3 + 6x^2y^2) : 5x^n y^n$.

47. Làm tính chia :

a) $[5(a - b)^3 + 2(a - b)^2] : (b - a)^2$;　　　b) $5(x - 2y)^3 : (5x - 10y)$;

c) $(x^3 + 8y^3) : (x + 2y)$.

Bài tập bổ sung

11.1. Kết quả của phép tính $(6x^9 - 2x^6 + 8x^3) : 2x^3$ là :

(A) $3x^3 - x^2 + 4x$;　　　(B) $3x^3 - x^2 + 4$;

(C) $3x^6 - x^3 + 4$;　　　(D) $3x^6 - x^3 + 4x$.

Hãy chọn kết quả đúng.

11.2. Tìm n ($n \in N$) để mỗi phép chia sau đây là phép chia hết

a) $(x^5 - 2x^3 - x) : 7x^n$.

b) $(5x^5y^5 - 2x^3y^3 - x^2y^2) : 2x^ny^n$.

§12. Chia đa thức một biến đã sắp xếp

48. Làm tính chia :

a) $(6x^2 + 13x - 5) : (2x + 5)$; b) $(x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x - 3)$;

c) $(2x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x - 3) : (x^2 - 3)$.

49. Sắp xếp các đa thức sau theo luỹ thừa giảm của biến rồi thực hiện phép chia :

a) $(12x^2 - 14x + 3 - 6x^3 + x^4) : (1 - 4x + x^2)$;

b) $(x^5 - x^2 - 3x^4 + 3x + 5x^3 - 5) : (5 + x^2 - 3x)$;

c) $(2x^2 - 5x^3 + 2x + 2x^4 - 1) : (x^2 - x - 1)$.

50. Cho hai đa thức

$$A = x^4 - 2x^3 + x^2 + 13x - 11 \text{ và } B = x^2 - 2x + 3.$$

Tìm thương Q và dư R sao cho A = B.Q + R.

51. Tìm a sao cho đa thức $x^4 - x^3 + 6x^2 - x + a$ chia hết cho đa thức $x^2 - x + 5$.

52. Tìm giá trị nguyên của n để giá trị của biểu thức $3n^3 + 10n^2 - 5$ chia hết cho giá trị của biểu thức 3n + 1.

Bài tập bổ sung

12.1. Kết quả của phép tính $(8x^3 - 1) : (1 - 2x)$ là :

(A) $4x^2 - 2x - 1$; (B) $-4x^2 - 2x - 1$;

(C) $4x^2 + 2x + 1$; (D) $4x^2 - 2x + 1$.

Hãy chọn kết quả đúng.

12.2. Kết quả phép tính $(x^3 + 8) : (x + 2)$ là :

(A) $x^2 + 4$; (B) $(x + 2)^2$;

(C) $x^2 + 2x + 4$; (D) $x^2 - 2x + 4$.

Hãy chọn kết quả đúng.

12.3. Cho hai đa thức $A = 2x^4 - 10x^3 + 3x^2 - 3x + 2$; $B = 2x^2 + 1$. Tìm đa thức dư R trong phép chia A cho B rồi viết A = B.Q + R.

Bài tập ôn chương I

53. Làm tính nhân :

a) $3x(x^2 - 7x + 9)$; b) $\frac{2}{5}xy(x^2y - 5x + 10y)$.

54. Làm tính nhân :

a) $(x^2 - 1)(x^2 + 2x)$; b) $(x + 3y)(x^2 - 2xy + y)$;

c) $(2x - 1)(3x + 2)(3 - x)$.

55. Tính nhanh giá trị của mỗi biểu thức sau :

a) $1,6^2 + 4 . 0,8 . 3,4 + 3,4^2$; b) $3^4 . 5^4 - (15^2 + 1)(15^2 - 1)$;

c) $x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 12x + 111$ tại $x = 11$.

56. Rút gọn biểu thức :

a) $(6x + 1)^2 + (6x - 1)^2 - 2(1 + 6x)(6x - 1)$;

b) $3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$.

57. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$; b) $x^4 - 5x^2 + 4$;

c) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

58. Làm tính chia :

a) $(2x^3 + 5x^2 - 2x + 3) : (2x^2 - x + 1)$;

b) $(2x^3 - 5x^2 + 6x - 15) : (2x - 5)$;

c) $(x^4 - x - 14) : (x - 2)$.

59. Tìm giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) của các biểu thức sau :

a) $A = x^2 - 6x + 11$; b) $B = 2x^2 + 10x - 1$; c) $C = 5x - x^2$.

Bài tập bổ sung

I.1. Kết quả của phép tính $(x + 2)(x - 1)$ là :

(A) $x^2 - 2$; (B) $x^2 + 2x - 2$; (C) $x^2 + x - 2$; (D) $x^2 + 2x$.

Hãy chọn kết quả đúng.

I.2. Rút gọn biểu thức $x(x - y) - y(y - x)$ ta được :

(A) $x^2 + y^2$; (B) $x^2 - y^2$; (C) $x^2 - xy$; (D) $(x - y)^2$.

Hãy chọn kết quả đúng.

I.3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $45 + x^3 - 5x^2 - 9x$.

b) $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$.

I.4. Làm tính chia

a) $(2x^5 - 5x^3 + x^2 + 3x - 1) : (x^2 - 1)$.

b) $(5x^5 - 2x^4 - 9x^3 + 7x^2 - 18x - 3) : (x^2 - 3)$.

I.5. Tính giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của các biểu thức sau :

a) $A = 2x^2 - 8x - 10$.

b) $B = 9x - 3x^2$.

LỜI GIẢI - CHỈ DẪN - ĐÁP SỐ

§1. Nhân đơn thức với đa thức

1. a) $15x^3 - 6x^2 - 3x$; b) $-x^3y - 2x^2y^2 + 3xy$;

c) $x^5y - \frac{1}{5}x^3y^3 - \frac{1}{2}x^2y$.

2. a) $-3x^3 - 3x$; b) $-11x + 24$; c) $2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$.

3. a) Rút gọn biểu thức, ta được $P = -15x$; Tại $x = -5$ thì $P = 75$.

b) Rút gọn biểu thức, ta được $Q = x^2 - y^2$; Tại $x = 1,5$ và $y = 10$ thì $Q = 2,25 - 100 = -97,75$.

4. a) Biểu thức rút gọn bằng -10. Vì vậy giá trị của biểu thức không phụ thuộc vào giá trị của biến.

b) Tương tự câu a), biểu thức rút gọn bằng 5.

5. Rút gọn vế trái, ta được $-13x = 26$. Vậy $x = -2$.

Bài tập bổ sung

1.1. $10x^5 - 8x^4y - 14x^3y + 2x^2$.

1.2. $10x^4 - 7x^3 - 5x^2$.

§2. Nhân đa thức với đa thức

6. a) $5x^3 - 7x^2y + 2xy^2 + 5x - 2y$; b) $x^3 + 2x^2 - x - 2$;

c) $2x^4y^2 - \frac{1}{2}x^2y^4$.

7. a) $x^2 - \frac{7}{2}x + 3$; b) $x^2 - 12x + 35$;

c) $4x^3 - x^2 - x + \frac{1}{4}$.

8. Biến đổi vế trái thành vế phải.

9. Đặt a = 3q + 1 ; b = 3p + 2 (q ; p $\in$ N). Ta có ab = 9pq + 6q + 3p + 2. Vậy ab chia cho 3 dư 2.

10. Biến đổi biểu thức, ta được – 5n. Hiển nhiên – 5n $\vdots$ 5 với mọi số nguyên n.

Bài tập bổ sung

2.1. Chọn (D).

2.2. Biểu thức rút gọn còn $-3n^2 - 3 = -3(n^2 + 1)$ luôn chia hết cho 3.

§3, 4, 5. Những hằng đẳng thức đáng nhớ

11. a) $x^2 + 4xy + 4y^2$; b) $x^2 - 9y^2$; c) $25 - 10x + x^2$.

12. a) $x^2 - 2x + 1$; b) $9 - 6y + y^2$; c) $x^2 - x + \frac{1}{4}$.

13. a) $(x + 3)^2$; b) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$; c) $(xy^2 + 1)^2$.

14. a) $2(x^2 + y^2)$; b) $4x^2$;

c) Vì $(z - y)^2 = (y - z)^2$, do đó biểu thức đã cho là bình phương của tổng, ta được $[(x - y + z) + (y - z)]^2 = x^2$.

15. Đặt a = 5q + 4 (q $\in$ N), ta có

$$a^2 = 25q^2 + 40q + 16 = (25q^2 + 40q + 15) + 1 \text{ chia cho 5 dư 1.}$$

16. a) 7 400 ; b) $100^3 = 1\,000\,000$; c) $100^3 = 1\,000\,000$.

17. *HD.* a) Biến đổi vế trái thành vế phải.

b) Có thể biến đổi vế này thành vế kia.

c) Biến đổi cả hai vế.

18. a) $x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1 > 0$ với mọi x.

b) $-(x^2 - 4x + 4) - 1 = -(x - 2)^2 - 1 < 0$ với mọi x.

19. a) $(x-1)^2+4 \geq 4$; Vậy giá trị nhỏ nhất (GTNN) là 4 tại x = 1.

b) $2(x^2-3x) = 2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2} \geq -\frac{9}{2}$; GTNN là $-\frac{9}{2}$ tại $x=\frac{3}{2}$.

c) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+3)^2+\frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$; GTNN là $\frac{3}{4}$ tại $x=\frac{1}{2}$ và y = –3.

20. a) $-(x^2-4x+4)+7=-(x-2)^2+7 \leq 7$; Vậy giá trị lớn nhất (GTLN) là 7 tại x = 2.

b) $-(x^2-x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$; GTLN là $\frac{1}{4}$ tại $x=\frac{1}{2}$;

c) $-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{2} \leq -\frac{9}{2}$; GTLN là $-\frac{9}{2}$ tại $x=\frac{1}{2}$.

Bài tập bổ sung

3.1. Chọn (B).

3.2. Chọn (D).

3.3. a) $P=-25x^2+15x+23$.

b) $Q=x^3+y^3$.

3.4. $P=\frac{1}{2}(5^{32}-1)$.

3.5. Có thể biến đổi vế trái thành vế phải hoặc ngược lại.

§6. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung

21. a) 1 270 ; b) 52 . (143 – 39 – 4) = 5 200.

22. a) 5(x – 4y) ; b) (x – 1). 2x ; c) (x + y)(x – 5).

23. a) Biến đổi thành x(x + y + 1). Giá trị cần tìm là 7700.

b) Biến đổi thành $(x-y)^2$. Giá trị cần tìm là 2500.

24. a) Biến đổi thành $x(1 + 5x) = 0$. Vậy $x = 0$; $x = -\frac{1}{5}$;

b) $x = -1$; $x = 0$; c) $x = 0$.

25. Phân tích thành nhân tử, ta thấy $n(n + 1)(n + 2)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên luôn chia hết cho 6 với mọi số nguyên n.

Bài tập bổ sung

6.1. Chọn (D).

6.2. a) 1300.

b) 8600.

§7. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức

26. a) $(x - 3)(x + 3)$; b) $(2x - 5)(2x + 5)$;

c) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

27. a) $(3x + y)^2$; b) $-(x - 3)^2$; c) $(x + 2y)^2$.

28. a) $4xy$; b) $4x(2x + 1)$;

c) Có nhiều cách giải. Có thể sử dụng bài 31 (SGK). Ta có

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y),$$

do đó

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= [(x + y)^3 + z^3] + [-3xy(x + y) - 3xyz] = \\ &= (x + y + z)[(x + y)^2 - z(x + y) + z^2] - 3xy(x + y + z) \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz). \end{aligned}$$

29. a) 400 ; b) $(87^2 - 13^2) + (73^2 - 27^2) = 7400 + 4600 = 12\,000$.

30. a) $x\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = 0$, tìm được ba giá trị là $x = 0$; $x = -\frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{2}$.

b) $x = 5$.

Bài tập bổ sung

7.1. Chọn (D).

7.2. a) $(2x-1)^2 = 0$; $x = \frac{1}{2}$.

b) $(2x+1)^3 = 0$; $x = -\frac{1}{2}$.

§8. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhóm hạng tử

31. a) $(x+y)(x-y-1)$; b) $(x-y-z)(x-y+z)$.

32. a) $(x-y)(5+a)$; b) $(a^2-y)(a-x)$;

c) Có nhiều cách giải, có thể thực hiện phép tính rồi nhóm lại thích hợp. Chẳng hạn, biểu thức được biến đổi thành :

$$[xy(x+y)+xyz]+[yz(y+z)+xyz]+xz(x+z)=$$
$$= xy(x+y+z)+yz(x+y+z)+xz(x+z)$$
$$= y(x+y+z)(x+z)+xz(x+z)$$
$$= (x+z)(xy+y^2+yz+xz)$$
$$= (x+z)(x+y)(y+z).$$

33. a) Biến đổi thành $(x-y-2z)(x-y+2z)$. Giá trị cần tìm là $-8\,000$.

b) $(2x+1)^2$. Giá trị cần tìm là 4.

Bài tập bổ sung

Phân tích thành nhân tử

8.1. a) $(2x+1-y)(2x+1+y)$.

b) $(x+y)(x^2-xy+y^2-1)$.

§9. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách phối hợp nhiều phương pháp

34. a) $x^2(x+1)^2$; b) $(x+y)(x+y-1)(x+y+1)$;

c) $5(x-y)^2-20z^2 = 5(x-y-2z)(x-y+2z)$.

35. a) $(x-1)(x+6)$; b) $(5x-1)(x+y)$;

c) $4x-6x^2-2+3x=(2x-1)(2-3x)$.

36. a) $(x+3)(x+1)$; b) Biến đổi thành $2x^2-2x+5x-5=(x-1)(2x+5)$;

c) $15x-5x^2-3+x=(5x-1)(3-x)$.

37. a) $x=1$; $x=\frac{1}{5}$; b) $x=-5$; $x=2$.

38. Có nhiều cách để chứng minh. Chẳng hạn, thay $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ và $a+b=-c$, ta được

$$a^3+b^3+c^3=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3=-c^3-3ab.(-c)+c^3=3abc.$$

Bài tập bổ sung

9.1. Chọn (D).

9.2. Chọn (B).

9.3. a) $x=3$; $x=-1$.

b) $x=-3$; $x=\frac{1}{2}$.

§10. Chia đơn thức cho đơn thức

39. a) x ; b) y^3.

40. a) $x+y$; b) $x-y$; c) $x-y+z$.

41. a) $3xy$; b) $-\frac{5}{2}a$; c) $3yz$.

42. a) $n\in\mathbf{N}$; $n\le 4$; b) $n\in\mathbf{N}$; $n\ge 3$;

c) $n\in\mathbf{N}$; $n\ge 2$; d) $n\in\mathbf{N}$; $n\ge 4$.

43. Thực hiện phép chia, ta được $-x^2y^5$. Giá trị cần tìm là $\frac{1}{4}$.

Bài tập bổ sung

10.1. a) $125x^3$.

b) $-x^9y^2z$.

10.2. Rút gọn được $-x^{12}y^4$ thay giá trị $x=1$; $y=-10$, tính được -10000.

§11. Chia đa thức cho đơn thức

44. a) 29 ; b) $(2^3 . 8^3 - 8^4) : 8^3 = 0$.

45. a) $\frac{5}{3}x^2 - x + \frac{1}{3}$; b) $-5y - 9 + xy$; c) $3xy - \frac{3}{2}y - 3x$.

46. *Nhận xét.* Đa thức A chia hết cho đơn thức B nếu bậc của mỗi biến trong B không lớn hơn bậc thấp nhất của biến đó trong A. Do đó ta có :

a) $n = 1$; $n = 0$; b) $n = 0$; $n = 1$; $n = 2$.

47. a) $5(a - b) + 2$; b) $(x - 2y)^2$;

c) Có thể dùng hằng đẳng thức. Ta tính được thương là $x^2 - 2xy + 4y^2$.

Bài tập bổ sung

11.1. Chọn (C).

11.2. a) $n = 0$; 1.

b) $n = 0$; 1 ; 2.

§12. Chia đa thức một biến đã sắp xếp

48. a) $3x - 1$;

b) Có thể phân tích đa thức $x^3 - 3x^2 + x - 3 = (x - 3)(x^2 + 1)$, từ đó tính ngay được thương là $x^2 + 1$;

c) $2x^2 + x + 1$.

49. a) $x^2 - 2x + 3$; b) $x^3 - 1$; c) $2x^2 - 3x + 1$.

50. $Q = x^2 - 2$; $R = 9x - 5$.

51. $a = 5$.

52. Thực hiện phép chia, ta có $3n^3 + 10n^2 - 5 = (3n + 1)(n^2 + 3n - 1) - 4$. Để có phép chia hết thì $4 \vdots 3n + 1$.

Vậy, ta tìm số nguyên n sao cho $3n + 1$ là ước của 4. Khi đó, ta có $n = 0$; $n = -1$; $n = 1$.

Bài tập bổ sung

12.1. Chọn (B).

12.2. Chọn (D).

12.3. $A = (2x^2 + 1)(x^2 - 5x + 1) + 2x + 1$.

Bài tập ôn chương I

53. a) $3x^3 - 21x^2 + 27x$; b) $\frac{2}{5}x^3y^2 - 2x^2y + 4xy^2$.

54. a) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$; b) $x^3 + x^2y + xy - 6xy^2 + 3y^2$;

c) $-6x^3 + 17x^2 + 5x - 6$.

55. a) $(1,6 + 3,4)^2 = 25$; b) 1 ;

c) Thay $12 = x + 1$ hoặc phân tích đa thức thành nhân tử chứa các nhân tử $x - 11$, ta được 100.

56. a) 4 ;

b) *HD*. Thay $3 = 2^2 - 1$ rồi áp dụng liên tiếp hằng đẳng thức

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2,$$

ta được kết quả là $2^{32} - 1$.

57. a) $(x - 2)(x + 2)(x - 3)$; b) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$;

c) Sử dụng $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$ thay

$$(x + y + z)^3 = (x + y)^3 + z^3 + 3(x + y + z)(x + y)z,$$

ta được

$$\begin{aligned}(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 &= (x + y)^3 - x^3 - y^3 + 3(x + y + z)(x + y)z \\ &= 3xy(x + y) + 3(x + y + z)(x + y)z \\ &= 3(x + y)(xy + xz + yz + z^2) \\ &= 3(x + y)(x + z)(y + z).\end{aligned}$$

58. a) $x + 3$; b) $x^2 + 3$; c) $x^3 + 2x^2 + 4x + 7$.

59. a) $A = (x-3)^2 + 2 \geq 2$. Vậy GTNN là 2 tại $x = 3$;

b) $B = 2\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{27}{2} \geq -\frac{27}{2}$. Vậy GTNN là $-\frac{27}{2}$ tại $x = -\frac{5}{2}$;

c) $C = -\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \leq \frac{25}{4}$. Vậy GTLN là $\frac{25}{4}$ tại $x = \frac{5}{2}$.

Bài tập bổ sung

I.1. Chọn (C).

I.2. Chọn (B).

I.3. a) $(x-3)(x+3)(x-5)$.

b) $(x+1)(x-3)(x^2+1)$.

I.4. a) $2x^3 - 3x + 1$.

b) $5x^3 - 2x^2 + 6x + 1$.

I.5. Viết được $A = 2(x-2)^2 - 18 \geq -18$, do đó giá trị nhỏ nhất của A là -18 tại $x = 2$.

Viết được $B = -3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} \leq \frac{27}{4}$, do đó giá trị lớn nhất của B là $\frac{27}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$.

Chương II

PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

ĐỀ BÀI

§1. Phân thức đại số

1. Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\frac{x^2y^3}{5} = \frac{7x^3y^4}{35xy}$;

b) $\frac{x^2(x+2)}{x(x+2)^2} = \frac{x}{x+2}$;

c) $\frac{3-x}{3+x} = \frac{x^2-6x+9}{9-x^2}$;

d) $\frac{x^3-4x}{10-5x} = \frac{-x^2-2x}{5}$.

2. Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau, hãy tìm đa thức A trong mỗi đẳng thức sau :

a) $\dfrac{A}{2x-1}=\dfrac{6x^2+3x}{4x^2-1}$;

b) $\dfrac{4x^2-3x-7}{A}=\dfrac{4x-7}{2x+3}$;

c) $\dfrac{4x^2-7x+3}{x^2-1}=\dfrac{A}{x^2+2x+1}$;

d) $\dfrac{x^2-2x}{2x^2-3x-2}=\dfrac{x^2+2x}{A}$.

3. Bạn Lan viết các đẳng thức sau và đố các bạn trong nhóm học tập tìm ra chỗ sai . Em hãy sửa chỗ sai cho đúng.

a) $\dfrac{5x+3}{x-2}=\dfrac{5x^2+13x+6}{x^2-4}$;

b) $\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{x^2+3}{x^2+6x+9}$;

c) $\dfrac{x^2-2}{x^2-1}=\dfrac{x+2}{x+1}$;

d) $\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2+3x-4}=\dfrac{2x^2-x-3}{x^2+5x+4}$.

Bài tập bổ sung

1.1. Tìm đa thức P để $\dfrac{x-3}{x^2+x+1}=\dfrac{P}{x^3-1}$. Phương án nào sau đây là đúng ?

(A) $P = x^2 + 3$;

(B) $P = x^2 - 4x + 3$;

(C) $P = x + 3$;

(D) $P = x^2 - x - 3$.

1.2. Trong mỗi trường hợp sau hãy tìm hai đa thức P và Q thoả mãn đẳng thức :

a) $\dfrac{(x+2)P}{x-2}=\dfrac{(x-1)Q}{x^2-4}$;

b) $\dfrac{(x+2)P}{x^2-1}=\dfrac{(x-2)Q}{x^2-2x+1}$.

1.3*. Cho hai phân thức $\dfrac{P}{Q}$ và $\dfrac{R}{S}$. Chứng tỏ rằng :

a) Nếu $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{R}{S}$ thì $\dfrac{P+Q}{Q}=\dfrac{R+S}{S}$.

b) Nếu $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{R}{S}$ và $P \neq Q$ thì $R \neq S$ và $\dfrac{P}{Q-P}=\dfrac{R}{S-R}$.

§2. Tính chất cơ bản của phân thức

4. Dùng tính chất cơ bản của phân thức, hãy điền một đa thức thích hợp vào các chỗ trống trong mỗi đẳng thức sau :

a) $\frac{x - x^2}{5x^2 - 5} = \frac{x}{...}$;

b) $\frac{x^2 + 8}{2x - 1} = \frac{3x^3 + 24x}{...}$;

c) $\frac{...}{x - y} = \frac{3x^2 - 3xy}{3(y - x)^2}$;

d) $\frac{-x^2 + 2xy - y^2}{x + y} = \frac{...}{y^2 - x^2}$.

5. Biến đổi mỗi phân thức sau thành một phân thức bằng nó và có tử thức là đa thức A cho trước :

a) $\frac{4x + 3}{x^2 - 5}$, $A = 12x^2 + 9x$;

b) $\frac{8x^2 - 8x + 2}{(4x - 2)(15 - x)}$, $A = 1 - 2x$.

6. Dùng tính chất cơ bản của phân thức để biến đổi mỗi cặp phân thức sau thành một cặp phân thức bằng nó và có cùng tử thức :

a) $\frac{3}{x + 2}$ và $\frac{x - 1}{5x}$;

b) $\frac{x + 5}{4x}$ và $\frac{x^2 - 25}{2x + 3}$.

7. Dùng tính chất cơ bản của phân thức hoặc quy tắc đổi dấu để biến đổi mỗi cặp phân thức sau thành một cặp phân thức bằng nó và có cùng mẫu thức :

a) $\frac{3x}{x - 5}$ và $\frac{7x + 2}{5 - x}$;

b) $\frac{4x}{x + 1}$ và $\frac{3x}{x - 1}$;

c) $\frac{2}{x^2 + 8x + 16}$ và $\frac{x - 4}{2x + 8}$;

d) $\frac{2x}{(x + 1)(x - 3)}$ và $\frac{x + 3}{(x + 1)(x - 2)}$.

8. Cho hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$. Chứng minh rằng có vô số cặp phân thức cùng mẫu, có dạng $\frac{A'}{E}$ và $\frac{C'}{E}$ thoả mãn điều kiện $\frac{A'}{E} = \frac{A}{B}$ và $\frac{C'}{E} = \frac{C}{D}$.

Bài tập bổ sung

2.1. Hãy điền vào chỗ trống một đa thức thích hợp để được đẳng thức :

a) $\frac{x + 5}{3x - 2} = \frac{...}{x(3x - 2)}$;

b) $\frac{2x - 1}{4} = \frac{(2x - 1)...}{8x + 4}$;

c) $\frac{2x.(...)}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2x}{x - 2}$;

d) $\frac{5x^2 + 10x}{(x - 2)...} = \frac{5x}{x - 2}$.

2.2. Biến đổi mỗi phân thức sau thành phân thức có mẫu thức là $x^2 - 9$:

$$\frac{3x}{x+3}\ ;\ \frac{x-1}{x-3}\ ;\ x^2+9.$$

2.3. Dùng tính chất cơ bản của phân thức chứng tỏ rằng các cặp phân thức sau bằng nhau :

a) $\dfrac{x^2+3x+2}{3x+6}$ và $\dfrac{2x^2+x-1}{6x-3}$.

b) $\dfrac{15x-10}{3x^2+3x-(2x+2)}$ và $\dfrac{5x^2-5x+5}{x^3+1}$.

§3. Rút gọn phân thức

9. Rút gọn các phân thức :

a) $\dfrac{14xy^5(2x-3y)}{21x^2y(2x-3y)^2}$;

b) $\dfrac{8xy(3x-1)^3}{12x^3(1-3x)}$;

c) $\dfrac{20x^2-45}{(2x+3)^2}$;

d) $\dfrac{5x^2-10xy}{2(2y-x)^3}$;

e) $\dfrac{80x^3-125x}{3(x-3)-(x-3)(8-4x)}$;

f) $\dfrac{9-(x+5)^2}{x^2+4x+4}$;

g) $\dfrac{32x-8x^2+2x^3}{x^3+64}$;

h) $\dfrac{5x^3+5x}{x^4-1}$;

i) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}$.

10. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\dfrac{x^2y+2xy^2+y^3}{2x^2+xy-y^2}=\dfrac{xy+y^2}{2x-y}$;

b) $\dfrac{x^2+3xy+2y^2}{x^3+2x^2y-xy^2-2y^3}=\dfrac{1}{x-y}$.

11. Cho hai phân thức $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}$, $\dfrac{5x^3+10x^2+5x}{x^3+3x^2+3x+1}$. Theo bài tập 8, có vô số cặp phân thức có cùng mẫu thức và bằng cặp phân thức đã cho. Hãy tìm cặp phân thức như thế với mẫu thức là đa thức có bậc thấp nhất.

12. Tìm x, biết :

a) $a^2x + x = 2a^4 - 2$ với a là hằng số ;

b) $a^2x + 3ax + 9 = a^2$ với a là hằng số, $a \neq 0$ và $a \neq -3$.

Bài tập bổ sung

3.1. Rút gọn phân thức :

a) $\dfrac{x^4 - y^4}{y^3 - x^3}$; b) $\dfrac{(2x-4)(x-3)}{(x-2)(3x^2-27)}$; c) $\dfrac{2x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$.

3.2*. Rút gọn phân thức

$$Q = \frac{x^{10} - x^8 - x^7 + x^6 + x^5 + x^4 - x^3 - x^2 + 1}{x^{30} + x^{24} + x^{18} + x^{12} + x^6 + 1}.$$

§4. Quy đồng mẫu thức nhiều phân thức

13. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau :

a) $\dfrac{25}{14x^2y}, \dfrac{14}{21xy^5}$; b) $\dfrac{11}{102x^4y}, \dfrac{3}{34xy^3}$;

c) $\dfrac{3x+1}{12xy^4}, \dfrac{y-2}{9x^2y^3}$; d) $\dfrac{1}{6x^3y^2}, \dfrac{x+1}{9x^2y^4}, \dfrac{x-1}{4xy^3}$;

e) $\dfrac{3+2x}{10x^4y}, \dfrac{5}{8x^2y^2}, \dfrac{2}{3xy^5}$; f) $\dfrac{4x-4}{2x(x+3)}, \dfrac{x-3}{3x(x+1)}$;

g) $\dfrac{2x}{(x+2)^3}, \dfrac{x-2}{2x(x+2)^2}$; h) $\dfrac{5}{3x^3-12x}, \dfrac{3}{(2x+4)(x+3)}$.

14. Quy đồng mẫu thức các phân thức :

a) $\dfrac{7x-1}{2x^2+6x}, \dfrac{5-3x}{x^2-9}$; b) $\dfrac{x+1}{x-x^2}, \dfrac{x+2}{2-4x+2x^2}$;

c) $\dfrac{4x^2-3x+5}{x^3-1}, \dfrac{2x}{x^2+x+1}, \dfrac{6}{x-1}$; d) $\dfrac{7}{5x}, \dfrac{4}{x-2y}, \dfrac{x-y}{8y^2-2x^2}$;

e) $\dfrac{5x^2}{x^3+6x^2+12x+8}, \dfrac{4x}{x^2+4x+4}, \dfrac{3}{2x+4}$.

15. Cho đa thức $B = 2x^3 + 3x^2 - 29x + 30$ và hai phân thức

$$\frac{x}{2x^2+7x-15},\quad \frac{x+2}{x^2+3x-10}.$$

a) Chia đa thức B lần lượt cho các mẫu thức của hai phân thức đã cho.

b) Quy đồng mẫu thức của hai phân thức đã cho.

16. Cho hai phân thức $\frac{1}{x^2-4x-5}$ và $\frac{2}{x^2-2x-3}$.

Chứng tỏ rằng có thể chọn đa thức $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ làm mẫu thức chung để quy đồng mẫu thức hai phân thức đã cho. Hãy quy đồng mẫu thức.

Bài tập bổ sung

4.1. Quy đồng mẫu thức ba phân thức

$$\frac{x}{x^2-2xy+y^2-z^2},\ \frac{y}{y^2-2yz+z^2-x^2},\ \frac{z}{z^2-2zx+x^2-y^2}.$$

4.2*. Cho hai phân thức $\frac{1}{x^2+ax-2}$ và $\frac{2}{x^2+5x+b}$. Hãy xác định a và b biết rằng khi quy đồng mẫu thức chúng trở thành những phân thức có mẫu thức chung là $x^3 + 4x^2 + x - 6$. Viết tường minh hai phân thức đã cho và hai phân thức thu được sau khi quy đồng với mẫu thức chung là $x^3 + 4x^2 + x - 6$.

§5. Phép cộng các phân thức đại số

17. Cộng các phân thức cùng mẫu thức :

a) $\frac{1-2x}{6x^3y}+\frac{3+2y}{6x^3y}+\frac{2x-4}{6x^3y}$; b) $\frac{x^2-2}{x(x-1)^2}+\frac{2-x}{x(x-1)^2}$;

c) $\frac{3x+1}{x^2-3x+1}+\frac{x^2-6x}{x^2-3x+1}$; d) $\frac{x^2+38x+4}{2x^2+17x+1}+\frac{3x^2-4x-2}{2x^2+17x+1}$.

18. Cộng các phân thức khác mẫu thức :

a) $\frac{5}{6x^2y}+\frac{7}{12xy^2}+\frac{11}{18xy}$; b) $\frac{4x+2}{15x^3y}+\frac{5y-3}{9x^2y}+\frac{x+1}{5xy^3}$;

c) $\frac{3}{2x}+\frac{3x-3}{2x-1}+\frac{2x^2+1}{4x^2-2x}$; d) $\frac{x^3+2x}{x^3+1}+\frac{2x}{x^2-x+1}+\frac{1}{x+1}$.

19. Dùng quy tắc đổi dấu để tìm mẫu thức chung rồi thực hiện phép cộng :

a) $\frac{4}{x+2}+\frac{2}{x-2}+\frac{5x-6}{4-x^2}$;

b) $\frac{1-3x}{2x}+\frac{3x-2}{2x-1}+\frac{3x-2}{2x-4x^2}$;

c) $\frac{1}{x^2+6x+9}+\frac{1}{6x-x^2-9}+\frac{x}{x^2-9}$;

d) $\frac{x^2+2}{x^3-1}+\frac{2}{x^2+x+1}+\frac{1}{1-x}$;

e) $\frac{x}{x-2y}+\frac{x}{x+2y}+\frac{4xy}{4y^2-x^2}$.

20. Cộng các phân thức :

a) $\frac{1}{(x-y)(y-z)}+\frac{1}{(y-z)(z-x)}+\frac{1}{(z-x)(x-y)}$;

b) $\frac{4}{(y-x)(z-x)}+\frac{3}{(y-x)(y-z)}+\frac{3}{(y-z)(x-z)}$;

c) $\frac{1}{x(x-y)(x-z)}+\frac{1}{y(y-z)(y-x)}+\frac{1}{z(z-x)(z-y)}$.

21. Làm tính cộng các phân thức :

a) $\frac{11x+13}{3x-3}+\frac{15x+17}{4-4x}$;

b) $\frac{2x+1}{2x^2-x}+\frac{32x^2}{1-4x^2}+\frac{1-2x}{2x^2+x}$;

c) $\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2-x}+\frac{2x}{1-x^3}$;

d) $\frac{x^4}{1-x}+x^3+x^2+x+1$.

22. Cho hai biểu thức :

$A=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}+\frac{x-5}{x(x+5)}$, $B=\frac{3}{x+5}$.

Chứng tỏ rằng A = B.

23. Con tàu du lịch "Sông Hồng" đưa khách từ Hà Nội đến Việt Trì. Sau đó, nó nghỉ lại tại Việt Trì 2 giờ rồi quay về Hà Nội. Độ dài khúc sông từ Hà Nội

đến Việt Trì là 70km. Vận tốc của dòng nước là 5 km/h. Vận tốc thực của con tàu (tức là vận tốc trong nước yên lặng) là x km/h.

a) Hãy biểu diễn qua x :

– Thời gian ngược từ Hà Nội đến Việt Trì ;

– Thời gian xuôi từ Việt Trì về Hà Nội ;

– Thời gian kể từ lúc xuất phát đến khi về tới Hà Nội.

b) Tính thời gian kể từ lúc xuất phát đến khi con tàu về tới Hà Nội, biết rằng vận tốc lúc ngược dòng của con tàu là 20km/h.

Bài tập bổ sung

5.1. Cộng hai phân thức $\frac{x+3}{2x-1}+\frac{4-x}{1-2x}$. Phương án nào sau đây là đúng ?

(A) $\frac{7}{2x-1}$; (B) $\frac{7}{1-2x}$; (C) 1 ; (D) –1.

5.2*. Thực hiện phép cộng :

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}.$$

§6. Phép trừ các phân thức đại số

24. Làm tính trừ phân thức :

a) $\frac{3x-2}{2xy}-\frac{7x-4}{2xy}$; b) $\frac{3x+5}{4x^3y}-\frac{5-15x}{4x^3y}$;

c) $\frac{4x+7}{2x+2}-\frac{3x+6}{2x+2}$; d) $\frac{9x+5}{2(x-1)(x+3)^2}-\frac{5x-7}{2(x-1)(x+3)^2}$;

e) $\frac{xy}{x^2-y^2}-\frac{x^2}{y^2-x^2}$; f) $\frac{5x+y^2}{x^2y}-\frac{5y-x^2}{xy^2}$;

g) $\frac{x}{5x+5}-\frac{x}{10x-10}$; h) $\frac{x+9}{x^2-9}-\frac{3}{x^2+3x}$.

25. Theo định nghĩa của phép trừ, khi viết

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}-\frac{E}{F} \text{ có nghĩa là } \frac{A}{B}+\frac{-C}{D}+\frac{-E}{F}.$$

Áp dụng điều này để làm các phép tính sau :

a) $\frac{1}{3x-2} - \frac{1}{3x+2} - \frac{3x-6}{4-9x^2}$;

b) $\frac{18}{(x-3)(x^2-9)} - \frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{x}{x^2-9}$.

26. Rút gọn biểu thức :

a) $\frac{3x^2+5x+1}{x^3-1} - \frac{1-x}{x^2+x+1} - \frac{3}{x-1}$; b) $\frac{1}{x^2-x+1} + 1 - \frac{x^2+2}{x^3+1}$;

c) $\frac{7}{x} - \frac{x}{x+6} + \frac{36}{x^2+6x}$.

27. Nếu mua lẻ thì giá một bút bi là x đồng. Nhưng nếu mua từ 10 bút trở lên thì giá mỗi bút rẻ hơn 100 đồng. Cô Dung dùng 180 000 đồng để mua bút cho văn phòng. Hãy biểu diễn qua x :

– Tổng số bút mua được khi mua lẻ ;

– Số bút mua được nếu mua cùng một lúc, biết rằng giá tiền một bút không quá 1 200 đồng ;

– Số bút được lợi khi mua cùng một lúc so với khi mua lẻ.

28. a) Chứng minh : $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$.

b) **Đố.** Đố em tính nhẩm được tổng sau :

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{x+5}.$$

Bài tập bổ sung

6.1. Thực hiện phép trừ $\frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1}$. Cách thực hiện nào sau đây là **sai** ?

(A) $\frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \left(\frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x-1}\right) - \frac{1}{x-1} = \ldots$;

(B) $\frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x-1} - \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right) = \ldots$;

(C) $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2x}{x-1}-\left(\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x-1}\right)=\ldots;$

(D) $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{-x}{x-1}+\dfrac{-1}{x-1}=\ldots.$

6.2. Trong mỗi trường hợp sau hãy tìm phân thức Q thoả mãn điều kiện :

a) $\dfrac{1}{x^2+x+1}-Q=\dfrac{1}{x-x^2}+\dfrac{x^2+2x}{x^3-1}$;

b) $\dfrac{2x-6}{x^3-3x^2-x+3}+Q=\dfrac{6}{x-3}-\dfrac{2x^2}{1-x^2}.$

§7. Phép nhân các phân thức đại số

29. Làm tính nhân phân thức :

a) $\dfrac{30x^3}{11y^2}\cdot\dfrac{121y^5}{25x}$;

b) $\dfrac{24y^5}{7x^2}\cdot\left(-\dfrac{21x}{12y^3}\right)$;

c) $\left(-\dfrac{18y^3}{25x^4}\right)\cdot\left(-\dfrac{15x^2}{9y^3}\right)$;

d) $\dfrac{4x+8}{(x-10)^3}\cdot\dfrac{2x-20}{(x+2)^2}$;

e) $\dfrac{2x^2-20x+50}{3x+3}\cdot\dfrac{x^2-1}{4(x-5)^3}.$

30. Rút gọn biểu thức (chú ý dùng quy tắc đổi dấu để thấy nhân tử chung) :

a) $\dfrac{x+3}{x^2-4}\cdot\dfrac{8-12x+6x^2-x^3}{9x+27}$;

b) $\dfrac{6x-3}{5x^2+x}\cdot\dfrac{25x^2+10x+1}{1-8x^3}$;

c) $\dfrac{3x^2-x}{x^2-1}\cdot\dfrac{1-x^4}{(1-3x)^3}.$

31. Phân tích các tử thức và các mẫu thức (nếu cần thì dùng phương pháp thêm và bớt cùng một số hạng hoặc tách một số hạng thành hai số hạng) rồi rút gọn biểu thức :

a) $\dfrac{x-2}{x+1}\cdot\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$;

b) $\dfrac{x+1}{x^2-2x-8}\cdot\dfrac{4-x}{x^2+x}$;

c) $\dfrac{x+2}{4x+24}\cdot\dfrac{x^2-36}{x^2+x-2}.$

32. Áp dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng để rút gọn biểu thức :

a) $\frac{x^3}{x+1975}\cdot\frac{2x+1954}{x+1}+\frac{x^3}{x+1975}\cdot\frac{21-x}{x+1}$;

b) $\frac{19x+8}{x-7}\cdot\frac{5x-9}{x+1945}-\frac{19x+8}{x-7}\cdot\frac{4x-2}{x+1945}$.

33. Tính tích x.y, biết rằng x và y thoả mãn các đẳng thức sau (a, b là các hằng số) :

a) $(4a^2-9)x=4a+4$ với $a\neq\pm\frac{3}{2}$ và $(3a^3+3)y=6a^2+9a$ với $a\neq-1$;

b) $(2a^3-2b^3)x-3b=3a$ với $a\neq b$ và $(6a+6b)y=(a-b)^2$ với $a\neq-b$.

(Chú ý rằng $a^2+ab+b^2=a^2+2a\cdot\frac{b}{2}+\frac{b^2}{4}+\frac{3b^2}{4}=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\geq 0$.

Do đó nếu $a\neq 0$ hoặc $b\neq 0$ thì $a^2+ab+b^2>0$).

34. Rút gọn biểu thức :

a) $\frac{x^4+15x+7}{2x^3+2}\cdot\frac{x}{14x^2+1}\cdot\frac{4x^3+4}{x^4+15x+7}$;

b) $\frac{x^7+3x^2+2}{x^3-1}\cdot\frac{3x}{x+1}\cdot\frac{x^2+x+1}{x^7+3x^2+2}$.

35. **Đố.** Đố em điền được một phân thức vào chỗ trống trong đẳng thức sau :

$\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{x+2}{x+3}\cdot\frac{x+3}{x+4}\cdot\frac{x+4}{x+5}\cdot\frac{x+5}{x+6}\cdot\frac{x+6}{x+7}\cdot\frac{x+7}{x+8}\cdot\frac{x+8}{x+9}\cdot\frac{x+9}{x+10}\cdot\ldots=1$.

Bài tập bổ sung

7.1. Thực hiện các phép tính sau bằng hai cách : dùng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng và không dùng tính chất này :

a) $\frac{x^3-1}{x+2}\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}\right)$.

b) $\frac{x^3+2x^2-x-2}{2x+10}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)$.

7.2. Thực hiện phép nhân : $\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+x^4}\cdot\frac{1}{1+x^8}\cdot\frac{1}{1+x^{16}}$.

§8. Phép chia các phân thức đại số

36. Hãy làm các phép chia sau :

a) $\dfrac{7x+2}{3xy^3}:\dfrac{14x+4}{x^2y}$;

b) $\dfrac{8xy}{3x-1}:\dfrac{12xy^3}{5-15x}$;

c) $\dfrac{27-x^3}{5x+5}:\dfrac{2x-6}{3x+3}$;

d) $(4x^2-16):\dfrac{3x+6}{7x-2}$;

e) $\dfrac{3x^3+3}{x-1}:(x^2-x+1)$.

37. Thực hiện phép tính (chú ý đến quy tắc đổi dấu) :

a) $\dfrac{4(x+3)}{3x^2-x}:\dfrac{x^2+3x}{1-3x}$;

b) $\dfrac{4x+6y}{x-1}:\dfrac{4x^2+12xy+9y^2}{1-x^3}$.

38. Rút gọn biểu thức :

a) $\dfrac{x^4-xy^3}{2xy+y^2}:\dfrac{x^3+x^2y+xy^2}{2x+y}$;

b) $\dfrac{5x^2-10xy+5y^2}{2x^2-2xy+2y^2}:\dfrac{8x-8y}{10x^3+10y^3}$.

39. Thực hiện phép chia phân thức :

a) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+7x+12}:\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+3x}$;

b) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x-10}:\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-9x+14}$.

40. Tìm Q, biết :

a) $\dfrac{x-y}{x^3+y^3}\cdot Q=\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$;

b) $\dfrac{x+y}{x^3-y^3}\cdot Q=\dfrac{3x^2+3xy}{x^2+xy+y^2}$.

41. Rút gọn các biểu thức (chú ý đến thứ tự thực hiện các phép tính) :

a) $\dfrac{x+1}{x+2}:\dfrac{x+2}{x+3}:\dfrac{x+3}{x+1}$;

b) $\dfrac{x+1}{x+2}:\left(\dfrac{x+2}{x+3}:\dfrac{x+3}{x+1}\right)$;

c) $\dfrac{x+1}{x+2}\cdot\dfrac{x+2}{x+3}:\dfrac{x+3}{x+1}$;

d) $\dfrac{x+1}{x+2}\cdot\left(\dfrac{x+2}{x+3}:\dfrac{x+3}{x+1}\right)$;

e) $\dfrac{x+1}{x+2}:\dfrac{x+2}{x+3}\cdot\dfrac{x+3}{x+1}$;

f) $\dfrac{x+1}{x+2}:\left(\dfrac{x+2}{x+3}\cdot\dfrac{x+3}{x+1}\right)$.

42. Hà Nội cách TP. Hồ Chí Minh x km. Quãng đường từ Hà Nội đến Huế ngắn hơn quãng đường từ Huế đến TP. Hồ Chí Minh là 411km. Một con tàu xuất phát từ TP. Hồ Chí Minh đi Hà Nội. Sau đó 8 giờ con tàu thứ hai xuất phát từ Hà Nội đi TP. Hồ Chí Minh, chúng gặp nhau tại Huế rồi tiếp tục đi. Con tàu thứ hai phải đi 20 giờ nữa thì tới TP. Hồ Chí Minh.

Hãy biểu diễn qua x :

a) Chiều dài các quãng đường Hà Nội – Huế, Huế – TP. Hồ Chí Minh ;

b) Vận tốc của con tàu thứ hai ;

c) Thời gian đi của con tàu thứ hai từ Hà Nội vào Huế ;

d) Thời gian đi của con tàu thứ nhất từ TP. Hồ Chí Minh ra Huế ;

e) Vận tốc của con tàu thứ nhất ;

f) Thời gian đi của con tàu thứ nhất từ Huế ra Hà Nội.

43. **Đố.** Đố em điền được một phân thức vào chỗ trống của đẳng thức sau :

$$\frac{x}{x+1} : \frac{x+2}{x+1} : \frac{x+3}{x+2} : \frac{x+4}{x+3} : \frac{x+5}{x+4} : \ldots = 1.$$

Bài tập bổ sung

8.1. Hãy thực hiện các phép tính sau :

a) $\frac{x}{y} : \frac{y}{z}$; b) $\frac{y}{z} : \frac{x}{y}$; c) $\left(\frac{x}{y} : \frac{y}{z}\right) : \frac{z}{x}$; d) $\frac{x}{y} : \left(\frac{y}{z} : \frac{z}{x}\right)$.

So sánh kết quả của a) với kết quả của b) ; kết quả của c) với kết quả của d).

Phép chia có tính chất giao hoán và tính chất kết hợp hay không ?

8.2. Tìm phân thức P biết :

a) $P : \frac{4x^2 - 16}{2x + 1} = \frac{4x^2 + 4x + 1}{x - 2}$;

b) $\frac{2x^2 + 4x + 8}{x^3 - 3x^2 - x + 3} : P = \frac{x^3 - 8}{(x + 1)(x - 3)}$.

§9. Biến đổi các biểu thức hữu tỉ. Giá trị của phân thức

44. Biến đổi các biểu thức sau thành phân thức :

a) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{1-\dfrac{x}{x+2}}$;

b) $\dfrac{x-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$;

c) $\dfrac{1-\dfrac{2y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$;

d) $\dfrac{\dfrac{x}{4}-1+\dfrac{3}{4x}}{\dfrac{x}{2}-\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{2}}$.

45. Thực hiện các phép tính sau :

a) $\left(\dfrac{5x+y}{x^2-5xy}+\dfrac{5x-y}{x^2+5xy}\right).\dfrac{x^2-25y^2}{x^2+y^2}$;

b) $\dfrac{4xy}{y^2-x^2}:\left(\dfrac{1}{x^2+2xy+y^2}-\dfrac{1}{x^2-y^2}\right)$;

c) $\left[\dfrac{1}{(2x-y)^2}+\dfrac{2}{4x^2-y^2}+\dfrac{1}{(2x+y)^2}\right].\dfrac{4x^2+4xy+y^2}{16x}$;

d) $\left(\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{4}{x^2+4x+4}\right):\left(\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{1}{2-x}\right)$.

46. Tìm điều kiện của biến để giá trị của phân thức xác định :

a) $\dfrac{5x^2-4x+2}{20}$;

b) $\dfrac{8}{x+2004}$;

c) $\dfrac{4x}{3x-7}$;

d) $\dfrac{x^2}{x+z}$.

47. Phân tích mẫu thức của các phân thức sau thành nhân tử rồi tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức xác định :

a) $\dfrac{5}{2x-3x^2}$;

b) $\dfrac{2x}{8x^3+12x^2+6x+1}$;

c) $\dfrac{-5x^2}{16-24x+9x^2}$;

d) $\dfrac{3}{x^2-4y^2}$.

48. Có bạn nói rằng các phân thức $\frac{2x}{2x-2}, \frac{1}{x^2-2x+1}, \frac{5x^3}{(x-1)(x^2+1)}$ có cùng điều kiện của biến x. Điều đó đúng hay sai ? Vì sao ?

49. a) Tìm một phân thức (một biến) mà giá trị của nó được xác định với mọi giá trị của biến khác các số nguyên lẻ lớn hơn 5 và nhỏ hơn 10.

b) Tìm một phân thức (một biến) mà giá trị của nó được xác định với mọi giá trị của biến khác $\pm\sqrt{2}$.

50. **Đố.** Đố em tìm được một cặp phân thức của biến x mà khi giá trị của phân thức này bằng 0 thì giá trị của phân thức kia không xác định và ngược lại khi giá trị của phân thức kia bằng 0 thì giá trị của phân thức này không xác định. Em có thể tìm được bao nhiêu cặp phân thức như thế ?

51. Tính giá trị của các biểu thức :

a) $\frac{3x^2-x}{9x^2-6x+1}$ tại $x = -8$; b) $\frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$ tại $x = 1\,000\,001$.

52. Tìm điều kiện của các biến trong mỗi phân thức sau đây. Chứng minh rằng khi giá trị của phân thức xác định thì giá trị đó không phụ thuộc vào các biến x và y (nghĩa là chứng tỏ rằng có thể biến đổi phân thức đã cho thành một biểu thức không chứa x và y) :

a) $\frac{x^2-y^2}{(x+y)(6x-6y)}$;

b) $\frac{2ax-2x-3y+3ay}{4ax+6x+9y+6ay}$, (a là hằng số khác $-\frac{3}{2}$).

53. **Đố.** Đố em tìm được giá trị của x để giá trị của phân thức $\frac{4x^2-4x^3+x^4}{x^3-2x^2}$ bằng :

a) -2 ; b) 2 ; c) 0.

54. Cho biểu thức $\frac{x^2+2x}{2x+10} + \frac{x-5}{x} + \frac{50-5x}{2x(x+5)}$.

a) Tìm điều kiện của biến x để giá trị của biểu thức được xác định.

b) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức bằng 1.

c) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức bằng $-\frac{1}{2}$.

d) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức bằng -3.

55. Tìm x, biết :

a) $\frac{2x+1}{x^2-2x+1} - \frac{2x+3}{x^2-1} = 0$; b) $\frac{3}{x-3} - \frac{6x}{9-x^2} + \frac{x}{x+3} = 0.$

56. Với giá trị nào của x thì giá trị của mỗi biểu thức sau bằng 0 :

a) $\frac{x}{x^2-4} + \frac{3}{(x+2)^2}$? b) $\frac{1}{x^2+x+1} + x - 1$?

57. Tìm giá trị nguyên của biến x để tại đó giá trị của mỗi biểu thức sau là một số nguyên :

a) $\frac{2}{x-3}$; b) $\frac{3}{x+2}$;

c) $\frac{3x^3-4x^2+x-1}{x-4}$; d) $\frac{3x^2-x+1}{3x+2}$.

Hãy tham khảo cách giải câu d) được trình bày dưới đây để giải các câu còn lại :

Chia tử cho mẫu, ta tìm được thương Q = x – 1 và dư R = 3. Do đó

$$3x^2 - x + 1 = (3x+2)(x-1) + 3.$$

Vì thế $\frac{3x^2-x+1}{3x+2} = \frac{(3x+2)(x-1)+3}{3x+2} = x - 1 + \frac{3}{3x+2}$.

Nếu tồn tại giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức là số nguyên thì hiển nhiên x – 1 có giá trị nguyên và $\frac{3}{3x+2}$ cũng có giá trị nguyên. Do đó 3x + 2 phải là ước của 3, mà tập hợp các ước của 3 là $\{-3, -1, 1, 3\}$.

Nếu 3x + 2 = –3 thì 3x = –5 hay $x = -\frac{5}{3}$, không phải là số nguyên.

Nếu 3x + 2 = –1 thì 3x = –3 hay x = –1.

Nếu 3x + 2 = 1 thì 3x = –1 hay $x = -\frac{1}{3}$, không phải là số nguyên.

Nếu 3x + 2 = 3 thì 3x = 1 hay $x = \frac{1}{3}$, không phải là số nguyên.

Hiển nhiên với x = –1 thì giá trị của phân thức đã cho xác định vì khi đó $3x + 2 = -1 \neq 0$.

Vậy để biểu thức có giá trị nguyên thì x chỉ có thể có giá trị nguyên là –1. Ngược lại, với x = –1 thì giá trị của biểu thức là –5.

ĐS : x = –1.

Bài tập bổ sung

9.1. Biết rằng $Q = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \dfrac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{x-3}{x+3}$. Hãy tính giá trị của biểu thức Q. Câu trả lời nào sau đây là **sai** ?

(A) Giá trị của Q tại x = 4 là $\dfrac{4-3}{4+3} = \dfrac{1}{7}$;

(B) Giá trị của Q tại x = 1 là $\dfrac{1-3}{1+3} = -\dfrac{1}{2}$;

(C) Giá trị của Q tại x = 3 là $\dfrac{3-3}{3+3} = 0$;

(D) Giá trị của Q tại x = 3 không xác định.

9.2. Với mỗi biểu thức sau, hãy tìm giá trị của x để giá trị tương ứng của biểu thức bằng 1 :

a) $\dfrac{1 + x^2 + \dfrac{1}{x}}{2 + \dfrac{1}{x}}$; b) $\dfrac{1 + x^2 - \dfrac{4}{x+1}}{2 - \dfrac{4}{x+1}}$.

Bài tập ôn chương II

58. Thực hiện các phép tính :

a) $\left(\dfrac{9}{x^3 - 9x} + \dfrac{1}{x+3}\right) : \left(\dfrac{x-3}{x^2 + 3x} - \dfrac{x}{3x+9}\right)$;

b) $\left(\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{2}{x+2}\right) \cdot \dfrac{x^2 + 4x + 4}{8}$;

c) $\left(\dfrac{3x}{1-3x} + \dfrac{2x}{3x+1}\right) : \dfrac{6x^2 + 10x}{1 - 6x + 9x^2}$;

d) $\left(\dfrac{x}{x^2 - 25} - \dfrac{x-5}{x^2 + 5x}\right) : \dfrac{2x-5}{x^2 + 5x} + \dfrac{x}{5-x}$;

e) $\left(\dfrac{x^2 + xy}{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3} + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right) : \left(\dfrac{1}{x-y} - \dfrac{2xy}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}\right)$.

59. Chứng minh đẳng thức :

a) $\left(\dfrac{x^2-2x}{2x^2+8}-\dfrac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right)\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)=\dfrac{x+1}{2x}$;

b) $\left[\dfrac{2}{3x}-\dfrac{2}{x+1}\cdot\left(\dfrac{x+1}{3x}-x-1\right)\right]:\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{2x}{x-1}$;

c) $\left[\dfrac{2}{(x+1)^3}\cdot\left(\dfrac{1}{x}+1\right)+\dfrac{1}{x^2+2x+1}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)\right]:\dfrac{x-1}{x^3}=\dfrac{x}{x-1}$.

60. Biến đổi các biểu thức hữu tỉ thành phân thức :

a) $\dfrac{\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x+1}{x}}{\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x-1}{x}}$;

b) $\dfrac{\dfrac{5}{4}-\dfrac{5}{x+1}}{\dfrac{9-x^2}{x^2+2x+1}}$.

61. Một phân thức có giá trị bằng 0 khi giá trị của tử thức bằng 0 còn giá trị của mẫu thức khác 0. Ví dụ giá trị của phân thức $\dfrac{x^2-25}{x+1}=0$ khi $x^2-25=0$ và $x+1\neq 0$ hay $(x-5)(x+5)=0$ và $x\neq -1$. Vậy giá trị của phân thức này bằng 0 khi $x=\pm 5$.

Tìm các giá trị của x để giá trị của mỗi phân thức sau bằng 0 :

a) $\dfrac{98x^2-2}{x-2}$;

b) $\dfrac{3x-2}{x^2+2x+1}$.

62. Đối với mỗi biểu thức sau, hãy tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức được xác định :

a) $\dfrac{2x-3}{\dfrac{x-1}{x+2}}$;

b) $\dfrac{\dfrac{2x^2+1}{x}}{x-1}$;

c) $\dfrac{x^2-25}{\dfrac{x^2-10x+25}{x}}$;

d) $\dfrac{x^2-25}{\dfrac{x^2+10x+25}{x-5}}$.

63. Tìm giá trị của x để giá trị của các biểu thức trong bài tập 62 bằng 0.

64. Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức được xác định và chứng minh rằng với điều kiện đó biểu thức không phụ thuộc vào biến :

a) $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x^2+2x+1}{x}-\dfrac{2x+2}{x}}$;   b) $\dfrac{\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{2x+2}{x-1}-\dfrac{4x}{x^2-1}}$;

c) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x^3-x}{x^2+1}\cdot\left(\dfrac{x}{x^2-2x+1}-\dfrac{1}{x^2-1}\right)$;

d) $\left(\dfrac{x}{x^2-36}-\dfrac{x-6}{x^2+6x}\right):\dfrac{2x-6}{x^2+6x}+\dfrac{x}{6-x}$.

65. Chứng minh rằng :

a) Giá trị của biểu thức $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2:\left[\dfrac{x^2+1}{x^2}+\dfrac{2}{x+1}\left(\dfrac{1}{x}+1\right)\right]$ bằng 1 với mọi giá trị $x \neq 0$ và $x \neq -1$;

b) Giá trị của biểu thức $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{x^2+3x}{2x+3}\cdot\left(\dfrac{x+3}{x^2-3x}-\dfrac{x}{x^2-9}\right)$ bằng 1 khi $x \neq 0, x \neq -3, x \neq 3, x \neq -\dfrac{3}{2}$.

66. Chú ý rằng nếu $c > 0$ thì $(a+b)^2 + c$ và $(a-b)^2 + c$ đều dương với mọi a, b.

Áp dụng điều này chứng minh rằng :

a) Với mọi giá trị của x khác ± 1, biểu thức

$$\frac{x+2}{x-1}\cdot\left(\frac{x^3}{2x+2}+1\right)-\frac{8x+7}{2x^2-2}$$

luôn luôn có giá trị dương ;

b) Với mọi giá trị của x khác 0 và khác -3, biểu thức :

$$\frac{1-x^2}{x}\cdot\left(\frac{x^2}{x+3}-1\right)+\frac{3x^2-14x+3}{x^2+3x}$$

luôn luôn có giá trị âm.

67. Chú ý rằng vì $(x + a)^2 \geq 0$ với mọi giá trị của x và $(x + a)^2 = 0$ khi $x = -a$ nên $(x + a)^2 + b \geq b$ với mọi giá trị của x và $(x + a)^2 + b = b$ khi $x = -a$. Do đó giá trị nhỏ nhất của $(x + a)^2 + b$ bằng b khi $x = -a$. Áp dụng điều này giải các bài tập sau :

a) Rút gọn rồi tìm giá trị của x để biểu thức

$$\frac{x^2}{x-2}\cdot\left(\frac{x^2+4}{x}-4\right)+3$$

có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất ấy.

b) Rút gọn rồi tìm giá trị của x để biểu thức

$$\frac{(x+2)^2}{x}\cdot\left(1-\frac{x^2}{x+2}\right)-\frac{x^2+6x+4}{x}$$

có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất ấy.

Bài tập bổ sung

II.1. *(Đề thi học sinh giỏi toán cấp II, Miền Bắc năm 1963)*

Rút gọn và tính giá trị của biểu thức sau tại $x = -1{,}76$ và $y = \dfrac{3}{25}$:

$$P = \left[\left(\frac{x-y}{2y-x}-\frac{x^2+y^2+y-2}{x^2-xy-2y^2}\right):\frac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}\right]:\frac{x+1}{2x^2+y+2}.$$

II.2. *(Đề thi học sinh giỏi, lớp 8 toàn quốc năm 1980)*. Thực hiện phép tính :

$$\frac{1}{(b-c)(a^2+ac-b^2-bc)}+\frac{1}{(c-a)(b^2+ab-c^2-ac)}$$

$$+\frac{1}{(a-b)(c^2+bc-a^2-ab)}.$$

LỜI GIẢI - CHỈ DẪN - ĐÁP SỐ

§1. Phân thức đại số

1. *HD* : Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau để kiểm tra. Chẳng hạn,

c) $\frac{3-x}{3+x} = \frac{x^2-6x+9}{9-x^2}$.

Vì $(3 - x)(9 - x^2) = 27 - 9x - 3x^2 + x^3$ và

$(3 + x)(x^2 - 6x + 9) = 3x^2 - 18x + 27 + x^3 - 6x^2 + 9x = 27 - 9x - 3x^2 + x^3$.

2. a) $A(4x^2 - 1) = (2x - 1)(6x^2 + 3x)$ hay $A(4x^2 - 1) = 3x(2x + 1)(2x - 1)$. Vậy $A = 3x$.

b) $(4x^2 - 3x - 7)(2x + 3) = A(4x - 7)$

hay $(4x^2 - 7x + 4x - 7)(2x + 3) = A(4x - 7)$

hay $(4x - 7)(x + 1)(2x + 3) = A(4x - 7)$.

Vậy $A = (x + 1)(2x + 3) = 2x^2 + 5x + 3$.

(Cũng có thể làm phép nhân $(4x^2 - 3x - 7)(2x + 3)$ rồi lấy tích chia cho $4x - 7$).

c) $(4x^2 - 7x + 3)(x^2 + 2x + 1) = A(x^2 - 1)$. Suy ra $A = 4x^2 + x - 3$.

d) $A(x^2 - 2x) = (x^2 + 2x)(2x^2 - 3x - 2)$ hay $Ax(x - 2) = x(x + 2)(x - 2)(2x + 1)$. Suy ra $A = 2x^2 + 5x + 2$.

3. a) Kiểm tra đẳng thức $(5x + 3)(x^2 - 4) = (5x^2 + 13x + 6)(x - 2)$. Đẳng thức đã cho đúng.

b) Kiểm tra thấy rằng $(x + 1)(x^2 + 6x + 9) \neq (x + 3)(x^2 + 3)$. Đẳng thức đã cho sai.

c) Sai.

d) Đúng.

Bài tập bổ sung

1.1. Chọn (B).

1.2. *ĐS* : a) $P = x - 1$, $Q = (x + 2)(x + 2) = x^2 + 4x + 4$.

b) $P = (x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$, $Q = (x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$.

1.3. a) Vì $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$ nên P.S = Q.R. Do đó

(P + Q).S = P.S + Q.S = Q.R + Q.S = Q(R + S). Vậy $\frac{P+Q}{Q} = \frac{R+S}{S}$.

b) Lập luận tương tự.

§2. Tính chất cơ bản của phân thức

4. *HD :* a) Từ tử thức của hai vế chứng tỏ tử của vế trái đã được chia cho 1 – x. Do đó cũng phải chia mẫu của vế trái cho 1 – x. Mà

$$5x^2 - 5 = 5(x-1)(x+1) = -5(1-x)(x+1).$$

Vậy phải điền đa thức –5(x + 1) vào chỗ trống, tức là :

$$\frac{x-x^2}{5x^2-5} = \frac{x}{-5(x+1)}.$$

Cũng có thể lập luận như sau :

$$\frac{x-x^2}{5x^2-5} = \frac{x(1-x)}{5(x^2-1)} = \frac{x(1-x)}{5(x-1)(x+1)} = \frac{x(1-x)}{-5(1-x)(x+1)} = \frac{x}{-5(x+1)}.$$

b) Đã nhân tử thức của vế trái với 3x. Lập luận tương tự như trên, ta có :

$$\frac{x^2+8}{2x-1} = \frac{(x^2+8).3x}{(2x-1).3x} = \frac{3x^3+24x}{6x^2-3x}.$$

c) Vì $(y-x)^2 = (x-y)^2$ nên các mẫu thức ở hai vế chứng tỏ mẫu ở vế phải đã được chia cho 3(x – y) để được mẫu ở vế trái. Do đó cũng phải chia tử ở vế phải cho 3(x – y), mà $3x^2 - 3xy = 3x(x-y)$. Vậy tử ở vế trái bằng x, tức là

$$\frac{x}{x-y} = \frac{3x^2-3xy}{3(y-x)^2}.$$

Cũng có thể biến đổi như sau :

$$\frac{3x^2-3xy}{3(y-x)^2} = \frac{3x(x-y)}{3(x-y)^2} = \frac{x}{x-y},$$

(ta đã chia cả tử và mẫu của vế phải của đẳng thức trong bài tập cho 3(x – y)).

d) Vì $-x^2 + 2xy - y^2 = -(x - y)^2$ và $y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$ nên :

$$\frac{-x^2+2xy-y^2}{x+y} = \frac{-(x-y)^2}{x+y} = \frac{-(x-y)^2(y-x)}{(x+y)(y-x)} =$$

$$= \frac{(x-y)^3}{(x+y)(y-x)} = \frac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}{y^2-x^2}.$$

5. a) $A = 12x^2 + 9x = 3x(4x + 3)$, mà $\frac{4x+3}{x^2-5} = \frac{(4x+3).3x}{(x^2-5).3x} = \frac{12x^2+9x}{3x^3-15x}$. Vậy phân thức phải tìm là $\frac{12x^2+9x}{3x^3-15x}$.

b) $\frac{8x^2-8x+2}{(4x-2)(15-x)} = \frac{2(4x^2-4x+1)}{2(2x-1)(15-x)} = \frac{2(2x-1)^2}{2(2x-1)(15-x)}$

$$= \frac{2x-1}{15-x} = \frac{1-2x}{x-15}.$$

Vậy phân thức phải tìm là $\frac{1-2x}{x-15}$.

6. a) *ĐS* : $\frac{3x-3}{x^2+x-2}$ và $\frac{3x-3}{15x}$.

b) Vì $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$ nên tử thức chung có thể chọn là $x^2 - 25$.

$$\frac{x+5}{4x} = \frac{(x+5)(x-5)}{4x(x-5)} = \frac{x^2-25}{4x^2-20x}.$$

ĐS : $\frac{x^2-25}{4x^2-20x}$ và $\frac{x^2-25}{2x+3}$.

7. a) *ĐS* : $\frac{3x}{x-5}$ và $\frac{-7x-2}{x-5}$; b) *ĐS* : $\frac{4x^2-4x}{x^2-1}$ và $\frac{3x^2+3x}{x^2-1}$;

c) Vì $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ và $2x + 8 = 2(x + 4)$ nên mẫu thức chung là $2(x + 4)^2$.

Ta có $\dfrac{2}{x^2+8x+16}=\dfrac{2}{(x+4)^2}=\dfrac{2\,.\,2}{2(x+4)^2}=\dfrac{4}{2x^2+16x+32}$;

$$\frac{x-4}{2x+8}=\frac{x-4}{2(x+4)}=\frac{(x-4)(x+4)}{2(x+4)^2}=\frac{x^2-16}{2x^2+16x+32}.$$

ĐS : $\dfrac{4}{2x^2+16x+32}$ và $\dfrac{x^2-16}{2x^2+16x+32}$;

d) *ĐS :* $\dfrac{2x^2-4x}{(x+1)(x-2)(x-3)}$ và $\dfrac{x^2-9}{(x+1)(x-2)(x-3)}$.

8. Với hai phân thức $\dfrac{A}{B}$ và $\dfrac{C}{D}$, ta có hai phân thức cùng mẫu thức $\dfrac{A.D}{B.D}$, $\dfrac{B.C}{B.D}$ và $\dfrac{A.D}{B.D}=\dfrac{A}{B}$, $\dfrac{B.C}{B.D}=\dfrac{C}{D}$. Nhân cả tử và mẫu của hai phân thức này với cùng một đa thức $P\neq 0$ bất kì, ta được hai phân thức mới : $\dfrac{A.D.P}{B.D.P}$ và $\dfrac{B.C.P}{B.D.P}$.

Đặt A' = A . D . P, C' = B . C . P, E = B . D . P, ta được :

$$\frac{A'}{E}=\frac{A.D.P}{B.D.P}=\frac{A}{B} \text{ và } \frac{C'}{E}=\frac{B.C.P}{B.D.P}=\frac{C}{D}.$$

Vì có vô số đa thức $P \neq 0$ nên có vô số cặp phân thức $\dfrac{A'}{E}$ và $\dfrac{C'}{E}$ thoả mãn điều kiện đã cho.

Bài tập bổ sung

2.1. *ĐS :* a) x^2+5x ; b) $2x+1$; c) $x-2$; d) $x+2$.

2.2. *ĐS :* $\dfrac{3x}{x+3}=\dfrac{3x(x-3)}{x^2-9}$; $\dfrac{x-1}{x-3}=\dfrac{(x-1)(x+3)}{x^2-9}$;

$$x^2+9=\frac{(x^2+9)(x^2-9)}{x^2-9}.$$

2.3. a) $\dfrac{x^2+3x+2}{3x+6}=\dfrac{x^2+x+2x+2}{3(x+2)}=\dfrac{x(x+1)+2(x+1)}{3(x+2)}=\dfrac{(x+1)(x+2)}{3(x+2)}$.

Chia tử và mẫu cho x + 2 ta được $\frac{x+1}{3}$;

$$\frac{2x^2+x-1}{6x-3} = \frac{x^2+x+x^2-1}{3(2x-1)} = \frac{x(x+1)+(x+1)(x-1)}{3(2x-1)}$$

$$= \frac{(x+1)(2x-1)}{3(2x-1)}.$$

Chia tử và mẫu cho 2x – 1 ta được $\frac{x+1}{3}$.

b) Ta có $\frac{15x-10}{3x^2+3x-(2x+2)} = \frac{5(3x-2)}{3x(x+1)-2(x+1)}$

$$= \frac{5(3x-2)}{(x+1)(3x-2)} = \frac{5}{x+1};$$

$$\frac{5x^2-5x+5}{x^3+1} = \frac{5(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{5}{x+1}.$$

§3. Rút gọn phân thức

9. a) $\frac{2y^4}{3x(2x-3y)}$;

b) $\frac{8xy(3x-1)^3}{12x^3(1-3x)} = \frac{-8xy(1-3x)^3}{12x^3(1-3x)} = \frac{-2y(1-3x)^2}{3x^2}$;

c) $\frac{20x^2-45}{(2x+3)^2} = \frac{5(4x^2-9)}{(2x+3)^2} = \frac{5(2x-3)(2x+3)}{(2x+3)^2} = \frac{5(2x-3)}{2x+3}$;

d) $\frac{5x^2-10xy}{2(2y-x)^3} = \frac{5x(x-2y)}{2(2y-x)^3} = \frac{-5x(2y-x)}{2(2y-x)^3} = \frac{-5x}{2(2y-x)^2}$;

e) $\frac{80x^3-125x}{3(x-3)-(x-3)(8-4x)} = \frac{5x(16x^2-25)}{(x-3)(3-8+4x)}$

$$= \frac{5x(4x-5)(4x+5)}{(x-3)(4x-5)} = \frac{5x(4x+5)}{x-3};$$

f) $\dfrac{9-(x+5)^2}{x^2+4x+4}=\dfrac{(3-x-5)(3+x+5)}{(x+2)^2}=\dfrac{(-x-2)(x+8)}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{-(x+2)(x+8)}{(x+2)^2}=\dfrac{-x-8}{x+2}$;

g) $\dfrac{32x-8x^2+2x^3}{x^3+64}=\dfrac{2x(16-4x+x^2)}{(x+4)(x^2-4x+16)}=\dfrac{2x}{x+4}$;

h) $\dfrac{5x^3+5x}{x^4-1}=\dfrac{5x(x^2+1)}{(x^2-1)(x^2+1)}=\dfrac{5x}{x^2-1}$;

i) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}=\dfrac{x^2+2x+3x+6}{(x+2)^2}=\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+2)^2}=\dfrac{x+3}{x+2}$.

10. a) $\dfrac{x^2y+2xy^2+y^3}{2x^2+xy-y^2}=\dfrac{y(x^2+2xy+y^2)}{2x^2+2xy-xy-y^2}$

$=\dfrac{y(x+y)^2}{2x(x+y)-y(x+y)}=\dfrac{y(x+y)}{2x-y}=\dfrac{xy+y^2}{2x-y}$;

b) $\dfrac{x^2+3xy+2y^2}{x^3+2x^2y-xy^2-2y^3}=\dfrac{x^2+xy+2xy+2y^2}{x^3-xy^2+2x^2y-2y^3}$

$=\dfrac{x(x+y)+2y(x+y)}{x(x^2-y^2)+2y(x^2-y^2)}=\dfrac{(x+y)(x+2y)}{(x^2-y^2)(x+2y)}$

$=\dfrac{(x+y)(x+2y)}{(x-y)(x+y)(x+2y)}=\dfrac{1}{x-y}$.

11. Trước hết rút gọn mỗi phân thức :

$\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}=\dfrac{x^2(x-1)-(x-1)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{(x-1)(x^2-1)}{(x^2-1)^2}=$

$=\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{x+1}$.

$\dfrac{5x^3+10x^2+5x}{x^3+3x^2+3x+1}=\dfrac{5x(x^2+2x+1)}{(x+1)^3}=\dfrac{5x(x+1)^2}{(x+1)^3}=\dfrac{5x}{x+1}$.

Hai phân thức $\frac{1}{x+1}$ và $\frac{5x}{x+1}$ là hai phân thức cần tìm. Thật vậy, nếu còn có hai phân thức khác thoả mãn điều kiện của bài toán với bậc của mẫu thức chung thấp hơn thì mẫu thức chung ấy phải có bậc 0 tức là một hằng số $a \neq 0$ nào đó. Chẳng hạn, $\frac{1}{x+1} = \frac{b}{a}$. Theo định nghĩa hai phân thức bằng nhau ta có $1.a = b(x + 1) = bx + b$. Vì $a \neq 0$ nên $b \neq 0$. Do đó bậc của vế phải không nhỏ hơn 1 còn bậc của vế trái lại bằng 0. Đó là điều vô lí.

Chú ý. Cũng có thể lập luận như sau : Vì $x+1 = a\left(\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}\right)$ nên đẳng thức chứng tỏ ta đã chia mẫu thức $x + 1$ cho $\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$. Vậy 1 cũng phải chia hết cho $\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$. Nhưng điều đó là không thể được.

12. a) $a^2x + x = 2a^4 - 2$ hay $(a^2 + 1)x = 2(a^4 - 1)$. Vì $a^2 + 1 \geq 1$ nên $a^2 + 1 \neq 0$. Do đó

$$x = \frac{2(a^4 - 1)}{a^2 + 1} = \frac{2(a^2 - 1)(a^2 + 1)}{a^2 + 1} = 2(a^2 - 1).$$

b) $a^2x + 3ax + 9 = a^2$ hay $(a^2 + 3a)x = a^2 - 9$. Vì $a \neq 0$, $a \neq -3$, nên $a^2 + 3a = a(a + 3) \neq 0$. Do đó

$$x = \frac{a^2 - 9}{a^2 + 3a} = \frac{(a-3)(a+3)}{a(a+3)} = \frac{a-3}{a}.$$

Bài tập bổ sung

3.1. a) $-\frac{(x + y)(x^2 + y^2)}{x^2 + xy + y^2}$; b) $\frac{2}{3(x + 3)}$;

c) $\frac{2x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{x^2(2x + 1) - (2x + 1)}{x^2(x + 2) - (x + 2)} = \frac{(2x + 1)(x^2 - 1)}{(x + 2)(x^2 - 1)} = \frac{2x + 1}{x + 2}$.

3.2. *Giải* : $Q = \frac{(x^{10} - x^8 + x^6) - (x^7 - x^5 + x^3) + (x^4 - x^2 + 1)}{x^{18}(x^{12} + x^6 + 1) + x^{12} + x^6 + 1}$

$$= \frac{(x^4 - x^2 + 1)(x^6 - x^3 + 1)}{(x^{12} + x^6 + 1)(x^{18} + 1)}$$

$$= \frac{(x^4 - x^2 + 1)(x^6 - x^3 + 1)}{(x^{12} + 2x^6 + 1 - x^6)(x^6 + 1)(x^{12} - x^6 + 1)}$$

$$= \frac{(x^4 - x^2 + 1)(x^6 - x^3 + 1)}{[(x^6 + 1)^2 - x^6](x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^{12} - x^6 + 1)}$$

$$= \frac{x^6 - x^3 + 1}{(x^6 + x^3 + 1)(x^6 - x^3 + 1)(x^2 + 1)(x^{12} - x^6 + 1)}$$

$$= \frac{1}{(x^6 + x^3 + 1)(x^2 + 1)(x^{12} - x^6 + 1)}.$$

§4. Quy đồng mẫu thức nhiều phân thức

13. *ĐS :* a) $\frac{75y^4}{42x^2y^5}$, $\frac{28x}{42x^2y^5}$;

b) $\frac{11y^2}{102x^4y^3}$, $\frac{9x^3}{102x^4y^3}$;

c) $\frac{9x^2 + 3x}{36x^2y^4}$, $\frac{4y^2 - 8y}{36x^2y^4}$;

d) $\frac{6y^2}{36x^3y^4}$, $\frac{4x^2 + 4x}{36x^3y^4}$, $\frac{9x^3y - 9x^2y}{36x^3y^4}$;

e) $\frac{36y^4 + 24xy^4}{120x^4y^5}$, $\frac{75x^2y^3}{120x^4y^5}$, $\frac{80x^3}{120x^4y^5}$;

f) $\frac{4x - 4}{2x(x + 3)} = \frac{(4x - 4)3(x + 1)}{6x(x + 3)(x + 1)} = \frac{12(x - 1)(x + 1)}{6x(x + 3)(x + 1)} = \frac{12(x^2 - 1)}{6x(x + 3)(x + 1)}$,

$\frac{x - 3}{3x(x + 1)} = \frac{2(x + 3)(x - 3)}{6x(x + 3)(x + 1)} = \frac{2(x^2 - 9)}{6x(x + 3)(x + 1)}$;

g) $\frac{2x}{(x + 2)^3} = \frac{4x^2}{2x(x + 2)^3}$, $\frac{x - 2}{2x(x + 2)^2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{2x(x + 2)^3} = \frac{x^2 - 4}{2x(x + 2)^3}$;

h) $\dfrac{5}{3x^3-12x}=\dfrac{5}{3x(x-2)(x+2)}=\dfrac{5.2(x+3)}{6x(x-2)(x+2)(x+3)}$

$$=\frac{10(x+3)}{6x(x-2)(x+2)(x+3)},$$

$$\frac{3}{(2x+4)(x+3)}=\frac{3}{2(x+2)(x+3)}=\frac{3.3x(x-2)}{6x(x-2)(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{9x(x-2)}{6x(x-2)(x+2)(x+3)}.$$

14. a) Vì $2x^2+6x=2x(x+3)$ và $x^2-9=(x-3)(x+3)$. Vậy

$$\frac{7x-1}{2x^2+6x}=\frac{7x-1}{2x(x+3)}=\frac{(7x-1)(x-3)}{2x(x+3)(x-3)},$$

$$\frac{5-3x}{x^2-9}=\frac{5-3x}{(x+3)(x-3)}=\frac{2x(5-3x)}{2x(x+3)(x-3)};$$

b) $\dfrac{x+1}{x-x^2}=\dfrac{x+1}{x(1-x)}=\dfrac{2(x+1)(1-x)}{2x(1-x)^2},$

$$\frac{x+2}{2-4x+2x^2}=\frac{x+2}{2(1-x)^2}=\frac{x(x+2)}{2x(1-x)^2};$$

c) $\dfrac{4x^2-3x+5}{x^3-1}=\dfrac{4x^2-3x+5}{(x-1)(x^2+x+1)},\quad \dfrac{2x}{x^2+x+1}=\dfrac{2x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)},$

$$\frac{6}{x-1}=\frac{6(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)};$$

d) $\dfrac{7}{5x}=\dfrac{7.2(x-2y)(x+2y)}{5x.2(x-2y)(x+2y)}=\dfrac{14(x-2y)(x+2y)}{10x(x-2y)(x+2y)},$

$$\frac{4}{x-2y}=\frac{4.10x(x+2y)}{10x(x-2y)(x+2y)}=\frac{40x(x+2y)}{10x(x-2y)(x+2y)},$$

$$\frac{x-y}{8y^2-2x^2}=\frac{y-x}{2x^2-8y^2}=\frac{y-x}{2(x-2y)(x+2y)}=$$

$$=\frac{(y-x).5x}{2(x-2y)(x+2y).5x}=\frac{5x(y-x)}{10x(x-2y)(x+2y)};$$

e) $\dfrac{5x^2}{x^3+6x^2+12x+8}=\dfrac{5x^2}{(x+2)^3}=\dfrac{2.5x^2}{2(x+2)^3}=\dfrac{10x^2}{2(x+2)^3}$,

$\dfrac{4x}{x^2+4x+4}=\dfrac{4x}{(x+2)^2}=\dfrac{4x.2(x+2)}{2(x+2)^3}=\dfrac{8x(x+2)}{2(x+2)^3}$,

$\dfrac{3}{2x+4}=\dfrac{3}{2(x+2)}=\dfrac{3(x+2)^2}{2(x+2)^3}$.

15. a) Thực hiện các phép chia đã nói, ta được :

$2x^3+3x^2-29x+30=(2x^2+7x-15)(x-2)=(x^2+3x-10)(2x-3)$;

b) Theo a) ta có :

$$\dfrac{x}{2x^2+7x-15}=\dfrac{x(x-2)}{(2x^2+7x-15)(x-2)}=\dfrac{x^2-2x}{2x^3+3x^2-29x+30},$$

$$\dfrac{x+2}{x^2+3x-10}=\dfrac{(x+2)(2x-3)}{(x^2+3x-10)(2x-3)}=\dfrac{2x^2+x-6}{2x^3+3x^2-29x+30}.$$

16. Chia $x^3-7x^2+7x+15$ cho các mẫu thức của hai phân thức đã cho, ta được :

$x^3-7x^2+7x+15=(x^2-4x-5)(x-3)=(x^2-2x-3)(x-5)$. Do đó :

$$\dfrac{1}{x^2-4x-5}=\dfrac{1.(x-3)}{(x^2-4x-5)(x-3)}=\dfrac{x-3}{x^3-7x^2+7x+15},$$

$$\dfrac{2}{x^2-2x-3}=\dfrac{2(x-5)}{(x^2-2x-3)(x-5)}=\dfrac{2x-10}{x^3-7x^2+7x+15}.$$

Bài tập bổ sung

4.1. MTC $=(x-y+z)(x-y-z)(x+y-z)$

$$\dfrac{x}{x^2-2xy+y^2-z^2}=\dfrac{x(x+y-z)}{(x-y+z)(x-y-z)(x+y-z)},$$

$$\dfrac{y}{y^2-2yz+z^2-x^2}=\dfrac{y}{(y-z+x)(y-z-x)}=\dfrac{-y}{(x+y-z)(x-y+z)}$$

$$=\dfrac{-y(x-y-z)}{(x-y+z)(x-y-z)(x+y-z)},$$

$$\frac{z}{z^2 - 2zx + x^2 - y^2} = \frac{z}{(z - x + y)(z - x - y)}$$

$$= \frac{z(x - y + z)}{(x - y - z)(x + y - z)(x - y + z)}.$$

4.2. *Giải* : Chia $x^3 + 4x^2 + x - 6$ cho $x^2 + ax - 2$ ta được thương là $x + 4 - a$. Vì dư của phép chia phải bằng 0 nên ta suy ra $2a - 8 = -6$ (1)

và $a(4 - a) = 3$. (2)

Từ (1) suy ra $a = 1$. Giá trị này cũng thoả mãn (2).

Chia $x^3 + 4x^2 + x - 6$ cho $x^2 + 5x + b$ ta được thương là $x - 1$.

Tương tự như trên ta suy ra $b = 6$ (3)

và $1 - b = -5$. (4)

Giá trị $b = 6$ thoả mãn cả hai đẳng thức (3) và (4).

Vậy hai phân thức đã cho là $\frac{1}{x^2 + x - 2}$ và $\frac{2}{x^2 + 5x + 6}$,

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x^2 + x - 2)(x + 3) = (x^2 + 5x + 6)(x - 1)$.

Sau khi quy đồng mẫu thức ta được

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{x + 3}{x^3 + 4x^2 + x - 6} \text{ và } \frac{2}{x^2 + 5x + 6} = \frac{2(x - 1)}{x^3 + 4x^2 + x - 6}.$$

§5. Phép cộng các phân thức đại số

17. *ĐS* : a) $\frac{1}{3x^3}$; b) $\frac{1}{x-1}$; c) 1 ; d) 2.

18. a) $\frac{5}{6x^2y} + \frac{7}{12xy^2} + \frac{11}{18xy} = \frac{5.6y + 7.3x + 11.2xy}{36x^2y^2} = \frac{21x + 30y + 22xy}{36x^2y^2}$;

b) $\frac{4x+2}{15x^3y} + \frac{5y-3}{9x^2y} + \frac{x+1}{5xy^3} = \frac{(4x+2)3y^2 + (5y-3)5xy^2 + (x+1)9x^2}{45x^3y^3}$

$$= \frac{12xy^2 + 6y^2 + 25xy^3 - 15xy^2 + 9x^3 + 9x^2}{45x^3y^3}$$

$$= \frac{9x^3 + 9x^2 - 3xy^2 + 6y^2 + 25xy^3}{45x^3y^3} ;$$

c) $\frac{3}{2x}+\frac{3x-3}{2x-1}+\frac{2x^2+1}{4x^2-2x}=\frac{3(2x-1)+(3x-3)2x+2x^2+1}{2x(2x-1)}$

$$=\frac{6x-3+6x^2-6x+2x^2+1}{2x(2x-1)}=\frac{8x^2-2}{2x(2x-1)}=$$

$$=\frac{2(4x^2-1)}{2x(2x-1)}=\frac{2(2x-1)(2x+1)}{2x(2x-1)}=\frac{2x+1}{x}\ ;$$

d) $\frac{x^3+2x}{x^3+1}+\frac{2x}{x^2-x+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{x^3+2x+2x(x+1)+x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}=$

$$=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{(x+1)^3}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}.$$

19. a) $\frac{4}{x+2}+\frac{2}{x-2}+\frac{5x-6}{4-x^2}=\frac{4}{x+2}+\frac{2}{x-2}+\frac{6-5x}{x^2-4}=$

$$=\frac{4(x-2)+2(x+2)+6-5x}{(x-2)(x+2)}=\frac{4x-8+2x+4+6-5x}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\frac{x+2}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x-2}\ ;$$

b) $\frac{1-3x}{2x}+\frac{3x-2}{2x-1}+\frac{3x-2}{2x-4x^2}=\frac{(1-3x)(2x-1)+2x(3x-2)+2-3x}{2x(2x-1)}=$

$$=\frac{2x-1-6x^2+3x+6x^2-4x+2-3x}{2x(2x-1)}=\frac{-2x+1}{2x(2x-1)}=-\frac{1}{2x}\ ;$$

c) $\frac{1}{x^2+6x+9}+\frac{1}{6x-x^2-9}+\frac{x}{x^2-9}=\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{-1}{(x-3)^2}+\frac{x}{(x+3)(x-3)}=$

$$=\frac{(x-3)^2-(x+3)^2+x(x+3)(x-3)}{(x+3)^2(x-3)^2}=$$

$$=\frac{x^2-6x+9-x^2-6x-9+x^3-9x}{(x+3)^2(x-3)^2}=\frac{x^3-21x}{(x+3)^2(x-3)^2}\ ;$$

d) $\dfrac{x^2+2}{x^3-1}+\dfrac{2}{x^2+x+1}+\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{x^2+2+2(x-1)-(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=$

$=\dfrac{x^2+2+2x-2-x^2-x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{1}{x^2+x+1}$;

e) $\dfrac{x}{x-2y}+\dfrac{x}{x+2y}+\dfrac{4xy}{4y^2-x^2}=\dfrac{x(x+2y)+x(x-2y)-4xy}{(x-2y)(x+2y)}=$

$=\dfrac{x^2+2xy+x^2-2xy-4xy}{(x-2y)(x+2y)}=\dfrac{2x^2-4xy}{(x-2y)(x+2y)}=\dfrac{2x(x-2y)}{(x-2y)(x+2y)}=\dfrac{2x}{x+2y}$.

20. a) $\dfrac{1}{(x-y)(y-z)}+\dfrac{1}{(y-z)(z-x)}+\dfrac{1}{(z-x)(x-y)}=\dfrac{z-x+x-y+y-z}{(x-y)(y-z)(z-x)}=0$;

b) $\dfrac{4}{(y-x)(z-x)}+\dfrac{3}{(x-y)(z-y)}+\dfrac{3}{(x-z)(y-z)}=$

$=\dfrac{-4(y-z)-3(z-x)-3(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=\dfrac{-y+z}{(x-y)(y-z)(z-x)}=\dfrac{1}{(x-y)(x-z)}$;

c) $\dfrac{1}{x(x-y)(x-z)}+\dfrac{1}{y(y-x)(y-z)}+\dfrac{1}{z(z-x)(z-y)}=$

$=\dfrac{-yz(y-z)-zx(z-x)-xy(x-y)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}$

$=\dfrac{-y^2z+yz^2-z^2x+zx^2-x^2y+xy^2}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}$

$=\dfrac{-y^2(z-x)-zx(z-x)+y(z^2-x^2)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}=\dfrac{(z-x)(yz+xy-y^2-zx)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}$

$=\dfrac{(z-x)\left[y(x-y)-z(x-y)\right]}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}=\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}=\dfrac{1}{xyz}$.

Chú ý. Cũng có thể biến đổi như sau :

$\dfrac{1}{x(x-y)(x-z)}+\dfrac{1}{y(y-x)(y-z)}+\dfrac{1}{z(z-x)(z-y)}=$

$=\dfrac{-yz(y-z)-zx(z-x)-xy(x-y)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}$

$$= \frac{yz(x-y+z-x)-zx(z-x)-xy(x-y)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$= \frac{(x-y)(yz-xy)-(z-x)(zx-yz)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$= \frac{y(x-y)(z-x)-z(x-y)(z-x)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{1}{xyz}.$$

21. a) *ĐS* : $-\frac{1}{12}$;

b) $\frac{2x+1}{2x^2-x}+\frac{32x^2}{1-4x^2}+\frac{1-2x}{2x^2+x} = \frac{(2x+1)^2-32x^3-(2x-1)^2}{x(2x-1)(2x+1)}$

$$= \frac{-32x^3+8x}{x(2x-1)(2x+1)} = \frac{-8x(4x^2-1)}{x(2x-1)(2x+1)} = -8 \ ;$$

c) $\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2-x}+\frac{2x}{1-x^3} = \frac{x(x-1)+x^2+x+1-2x^2}{x(x-1)(x^2+x+1)}$

$$= \frac{1}{x(x-1)(x^2+x+1)} \ ;$$

d) $\frac{x^4}{1-x}+x^3+x^2+x+1 = \frac{x^4+1-x^4}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$

22. Biến đổi biểu thức A :

$$A = \frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}+\frac{x-5}{x(x+5)} = \frac{x+5+x+x-5}{x(x+5)} = \frac{3x}{x(x+5)} = \frac{3}{x+5} = B.$$

23. a) Vận tốc con tàu khi ngược dòng : x – 5(km/h).

Thời gian ngược từ Hà Nội đến Việt Trì là : $\frac{70}{x-5}$ (h).

Vận tốc con tàu khi xuôi dòng : x + 5 (km/h).

Thời gian xuôi từ Việt Trì đến Hà Nội là : $\frac{70}{x+5}$ (h).

Thời gian kể từ lúc xuất phát đến khi về tới Hà Nội là :

$$\frac{70}{x-5}+2+\frac{70}{x+5} \text{(h)}.$$

b) Với x – 5 = 20 hay x = 25, biểu thức vừa tìm được có giá trị bằng :

$$\frac{70}{20}+2+\frac{70}{25+5}=\frac{70}{20}+\frac{70}{30}+2=\frac{7}{2}+\frac{7}{3}+2 \text{ (h)}.$$

Nhưng $\frac{7}{2}$ giờ = 3 giờ 30 phút ; $\frac{7}{3}$ giờ = 2 giờ 20 phút.

Vậy thời gian kể từ lúc xuất phát đến khi về tới Hà Nội là : 7 giờ 50 phút.

Chú ý. Cũng có thể tính như sau :

Ta có :

$$\frac{70}{x-5}+2+\frac{70}{x+5}=\frac{70(x+5)+70(x-5)}{(x-5)(x+5)}+2=\frac{140x}{(x-5)(x+5)}+2.$$

Với x – 5 = 20, biểu thức này có giá trị bằng :

$$\frac{3500}{20.30}+2=\frac{35}{6}+2=5\frac{5}{6}+2=7\frac{5}{6} \text{ (h) hay 7 giờ 50 phút.}$$

Bài tập bổ sung

5.1. Chọn (C).

5.2. *Giải :* $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}$

$$=\frac{1+x+1-x}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}$$

$$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}$$

$$=\frac{2(1+x^2+1-x^2)}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}$$

$$=\frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}$$

$$=\frac{4(1+x^4+1-x^4)}{1-x^8}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}$$

$$=\frac{8}{1-x^8}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}=\frac{8(1+x^8+1-x^8)}{1-x^{16}}+\frac{16}{1+x^{16}}$$

$$=\frac{16}{1-x^{16}}+\frac{16}{1+x^{16}}=\frac{16(1+x^{16}+1-x^{16})}{1-x^{32}}=\frac{32}{1-x^{32}}.$$

§6. Phép trừ các phân thức đại số

24. a) $\frac{1-2x}{xy}$; b) $\frac{9}{2x^2y}$;

c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{2}{(x-1)(x+3)}$;

e) $\frac{xy}{x^2-y^2} - \frac{x^2}{y^2-x^2} = \frac{xy+x^2}{x^2-y^2} = \frac{x(y+x)}{(x-y)(x+y)} = \frac{x}{x-y}$;

f) $\frac{5x+y^2}{x^2y} - \frac{5y-x^2}{xy^2} = \frac{y(5x+y^2)-x(5y-x^2)}{x^2y^2}$

$$= \frac{5xy+y^3-5xy+x^3}{x^2y^2} = \frac{x^3+y^3}{x^2y^2} ;$$

g) $\frac{x}{5x+5} - \frac{x}{10x-10} = \frac{x}{5(x+1)} - \frac{x}{10(x-1)} = \frac{2x(x-1)-x(x+1)}{10(x+1)(x-1)} =$

$$= \frac{2x^2-2x-x^2-x}{10(x+1)(x-1)} = \frac{x^2-3x}{10(x+1)(x-1)} ;$$

h) $\frac{x+9}{x^2-9} - \frac{3}{x^2+3x} = \frac{x+9}{(x-3)(x+3)} - \frac{3}{x(x+3)} = \frac{x(x+9)-3(x-3)}{x(x-3)(x+3)} =$

$$= \frac{x^2+9x-3x+9}{x(x-3)(x+3)} = \frac{x^2+6x+9}{x(x-3)(x+3)} =$$

$$= \frac{(x+3)^2}{x(x-3)(x+3)} = \frac{x+3}{x(x-3)}.$$

25. a) $\frac{1}{3x-2} - \frac{1}{3x+2} - \frac{3x-6}{4-9x^2} = \frac{3x+2-(3x-2)+3x-6}{(3x-2)(3x+2)} =$

$$= \frac{3x+2-3x+2+3x-6}{(3x-2)(3x+2)} = \frac{3x-2}{(3x-2)(3x+2)} = \frac{1}{3x+2} ;$$

b) $$\frac{18}{(x-3)(x^2-9)}-\frac{3}{x^2-6x+9}-\frac{x}{x^2-9}=\frac{18-3(x+3)-x(x-3)}{(x+3)(x-3)^2}=$$

$$=\frac{18-3x-9-x^2+3x}{(x+3)(x-3)^2}=\frac{9-x^2}{(x+3)(x-3)^2}=\frac{1}{3-x}.$$

26. a) $$\frac{3x^2+5x+1}{x^3-1}-\frac{1-x}{x^2+x+1}-\frac{3}{x-1}=$$

$$=\frac{3x^2+5x+1-(1-x)(x-1)-3(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{3x^2+5x+1+x^2-2x+1-3x^2-3x-3}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{x^2-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x+1}{x^2+x+1};$$

b) $$\frac{1}{x^2-x+1}+1-\frac{x^2+2}{x^3+1}=\frac{x+1+x^3+1-x^2-2}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{x^3-x^2+x}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{x}{x+1};$$

c) $$\frac{7}{x}-\frac{x}{x+6}+\frac{36}{x^2+6x}=\frac{7(x+6)-x^2+36}{x(x+6)}=\frac{7x+42-x^2+36}{x(x+6)}=$$

$$=\frac{-x^2+7x+78}{x(x+6)}=\frac{-x^2-6x+13x+78}{x(x+6)}=$$

$$=\frac{-x(x+6)+13(x+6)}{x(x+6)}$$

$$=\frac{(x+6)(13-x)}{x(x+6)}=\frac{13-x}{x}.$$

27. – Số bút mua được nếu mua lẻ từng chiếc : $\frac{180\,000}{x}$ (bút).

– Vì giá tiền một bút không quá 1 200 đồng nên nếu mua cùng một lúc thì số bút mua được lớn hơn 10. Khi đó số bút mua được là : $\frac{180\,000}{x-100}$ (bút).

– Số bút được lợi khi mua cùng một lúc so với khi mua lẻ là :

$$\frac{180\,000}{x-100} - \frac{180\,000}{x} \text{ (bút).}$$

28. b) Áp dụng câu a), ta được kết quả là $\frac{1}{x}$.

Bài tập bổ sung

6.1. Chọn (B).

6.2. *Giải* : a) $Q = \frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x-x^2} - \frac{x^2+2x}{x^3-1}$

$$= \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2-x} - \frac{x^2+2x}{x^3-1}$$

$$= \frac{x^2 - x + x^2 + x + 1 - x^3 - 2x^2}{x(x^3-1)} = \frac{1-x^3}{x(x^3-1)} = -\frac{1}{x}.$$

b) $Q = \frac{6}{x-3} - \frac{2x^2}{1-x^2} - \frac{2x-6}{x^3-3x^2-x+3}$

$$= \frac{6}{x-3} + \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)} - \frac{2x-6}{x^2(x-3)-(x-3)}$$

$$= \frac{6}{x-3} + \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)} - \frac{2x-6}{(x-3)(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{6(x^2-1) + 2x^2(x-3) - 2x + 6}{(x-3)(x-1)(x+1)} = \frac{6x^2 - 6 + 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6}{(x-3)(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{2x^3-2x}{(x-3)(x-1)(x+1)} = \frac{2x(x^2-1)}{(x-3)(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{x-3}.$$

§7. Phép nhân các phân thức đại số

29. a) $\dfrac{66x^2y^3}{5}$; b) $-\dfrac{6y^2}{x}$; c) $\dfrac{6}{5x^2}$;

d) $\dfrac{8}{(x-10)^2(x+2)}$; e) $\dfrac{x-1}{6(x-5)}$.

30. a) $\dfrac{x+3}{x^2-4}\cdot\dfrac{8-12x+6x^2-x^3}{9x+27}=\dfrac{(x+3)(2-x)^3}{(x+2)(x-2).9(x+3)}=-\dfrac{(x-2)^2}{9(x+2)}$;

b) $\dfrac{6x-3}{5x^2+x}\cdot\dfrac{25x^2+10x+1}{1-8x^3}=\dfrac{3(2x-1)(5x+1)^2}{x(5x+1)(1-2x)(1+2x+4x^2)}$

$=-\dfrac{3(5x+1)}{x(1+2x+4x^2)}$;

c) $\dfrac{3x^2-x}{x^2-1}\cdot\dfrac{1-x^4}{(1-3x)^3}=\dfrac{x(3x-1)(1-x^2)(1+x^2)}{(x^2-1)(1-3x)^3}=\dfrac{x(1+x^2)}{(1-3x)^2}$.

31. a) $\dfrac{x-2}{x+1}\cdot\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}=\dfrac{(x-2)(x^2+x-3x-3)}{(x+1)(x^2-2x-3x+6)}=\dfrac{(x-2)(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-2)(x-3)}=1$;

b) $\dfrac{x+1}{x^2-2x-8}\cdot\dfrac{4-x}{x^2+x}=\dfrac{(x+1)(4-x)}{(x^2-4x+2x-8)(x+1)x}$

$=\dfrac{4-x}{x(x-4)(x+2)}=-\dfrac{1}{x(x+2)}$;

c) $\dfrac{x+2}{4x+24}\cdot\dfrac{x^2-36}{x^2+x-2}=\dfrac{(x+2)(x-6)(x+6)}{4(x+6)(x^2-x+2x-2)}$

$=\dfrac{(x+2)(x-6)}{4(x+2)(x-1)}=\dfrac{x-6}{4(x-1)}$.

32. a) $\dfrac{x^3}{x+1975}\cdot\dfrac{2x+1954}{x+1}+\dfrac{x^3}{x+1975}\cdot\dfrac{21-x}{x+1}=\dfrac{x^3}{x+1975}\left(\dfrac{2x+1954}{x+1}+\dfrac{21-x}{x+1}\right)$

$=\dfrac{x^3}{x+1975}\cdot\dfrac{x+1975}{x+1}=\dfrac{x^3}{x+1}$;

b) $\dfrac{19x+8}{x-7}\cdot\dfrac{5x-9}{x+1945}-\dfrac{19x+8}{x-7}\cdot\dfrac{4x-2}{x+1945}=\dfrac{19x+8}{x-7}\cdot\dfrac{5x-9-(4x-2)}{x+1945}$

$=\dfrac{(19x+8)(x-7)}{(x-7)(x+1945)}=\dfrac{19x+8}{x+1945}$.

33. a) Vì $4a^2 - 9 = (2a + 3)(2a - 3)$ nên với $a \neq \pm\frac{3}{2}$ thì $4a^2 - 9 \neq 0$.

Do đó $x = \dfrac{4a+4}{(2a-3)(2a+3)}$.

Vì $3a^3 + 3 = 3(a + 1)(a^2 - a + 1)$

và $a^2 - a + 1 = a^2 - 2.a.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$

nên với $a \neq -1$ thì $3a^3 + 3 \neq 0$. Do đó $y = \dfrac{6a^2 + 9a}{3a^3 + 3}$.

Vậy $x.y = \dfrac{4a+4}{4a^2-9}\cdot\dfrac{6a^2+9a}{3a^3+3} = \dfrac{4(a+1)3a(2a+3)}{(2a+3)(2a-3).3(a+1)(a^2-a+1)}$

$$= \frac{4a}{(2a-3)(a^2-a+1)};$$

b) Vì $2a^3 - 2b^3 = 2(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ và

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 + 2.a.\frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

nên với $a \neq b$ thì $2a^3 - 2b^3 \neq 0$. Do đó $x = \dfrac{3a+3b}{2a^3-2b^3}$.

Với $a \neq -b$, ta có $6a + 6b = 6(a + b) \neq 0$ nên $y = \dfrac{(a-b)^2}{6a+6b}$.

Vậy $x.y = \dfrac{3a+3b}{2a^3-2b^3}\cdot\dfrac{(a-b)^2}{6a+6b} = \dfrac{3(a+b)(a-b)^2}{2(a-b)(a^2+ab+b^2).6(a+b)}$

$$= \frac{a-b}{4(a^2+ab+b^2)}.$$

34. *HD* : Áp dụng tính chất giao hoán của phép nhân.

ĐS : a) $\dfrac{2x}{14x^2+1}$; b) $\dfrac{3x}{x^2-1}$.

35. $x + 10$.

Bài tập bổ sung

7.1. a) 1 ; b) $\frac{1}{2}$.

7.2. *Giải* : $\frac{1}{1-x}.\frac{1}{1+x}.\frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{1+x^4}.\frac{1}{1+x^8}.\frac{1}{1+x^{16}}$

$$=\frac{1}{1-x^2}.\frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{1+x^4}.\frac{1}{1+x^8}.\frac{1}{1+x^{16}}=\frac{1}{1-x^4}.\frac{1}{1+x^4}.\frac{1}{1+x^8}.\frac{1}{1+x^{16}}$$

$$=\frac{1}{1-x^8}.\frac{1}{1+x^8}.\frac{1}{1+x^{16}}=\frac{1}{1-x^{16}}.\frac{1}{1+x^{16}}=\frac{1}{1-x^{32}}.$$

§8. Phép chia các phân thức đại số

36. a) $\frac{7x+2}{3xy^3}:\frac{14x+4}{x^2y}=\frac{7x+2}{3xy^3}\cdot\frac{x^2y}{14x+4}=\frac{x}{6y^2}$;

b) $\frac{8xy}{3x-1}:\frac{12xy^3}{5-15x}=\frac{8xy}{3x-1}\cdot\frac{5-15x}{12xy^3}=-\frac{10}{3y^2}$;

c) $\frac{27-x^3}{5x+5}:\frac{2x-6}{3x+3}=\frac{27-x^3}{5x+5}\cdot\frac{3x+3}{2x-6}$

$$=\frac{(3-x)(9+3x+x^2).3(x+1)}{5(x+1).2(x-3)}=-\frac{3(x^2+3x+9)}{10}\ ;$$

d) $(4x^2-16):\frac{3x+6}{7x-2}=\frac{(4x^2-16)(7x-2)}{3x+6}=\frac{4(x-2)(x+2)(7x-2)}{3(x+2)}$

$$=\frac{4(x-2)(7x-2)}{3}\ ;$$

e) $\frac{3x^3+3}{x-1}:(x^2-x+1)=\frac{3(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x^2-x+1)}=\frac{3(x+1)}{x-1}$.

37. a) $\frac{4(x+3)}{3x^2-x}:\frac{x^2+3x}{1-3x}=\frac{4(x+3)}{x(3x-1)}\cdot\frac{1-3x}{x(x+3)}=-\frac{4}{x^2}$;

b) $\frac{4x+6y}{x-1}:\frac{4x^2+12xy+9y^2}{1-x^3}=\frac{2(2x+3y)}{x-1}\cdot\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{(2x+3y)^2}$

$$=-\frac{2(x^2+x+1)}{2x+3y}.$$

38. a) $\frac{x^4-xy^3}{2xy+y^2}:\frac{x^3+x^2y+xy^2}{2x+y}=\frac{x(x^3-y^3)}{y(2x+y)}\cdot\frac{2x+y}{x^3+x^2y+xy^2}$

$$=\frac{x(x-y)(x^2+xy+y^2)(2x+y)}{xy(2x+y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{x-y}{y};$$

b) $\frac{5x^2-10xy+5y^2}{2x^2-2xy+2y^2}:\frac{8x-8y}{10x^3+10y^3}=\frac{5(x-y)^2}{2(x^2-xy+y^2)}\cdot\frac{10(x+y)(x^2-xy+y^2)}{8(x-y)}$

$$=\frac{25(x-y)(x+y)}{8}=\frac{25}{8}(x^2-y^2).$$

39. a) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+7x+12}:\frac{x^2-4x+4}{x^2+3x}=\frac{x^2-2x-3x+6}{x^2+3x+4x+12}\cdot\frac{x(x+3)}{(x-2)^2}$

$$=\frac{x(x+3)(x-2)(x-3)}{(x+3)(x+4)(x-2)^2}=\frac{x(x-3)}{(x+4)(x-2)};$$

b) $\frac{x^2+2x-3}{x^2+3x-10}:\frac{x^2+7x+12}{x^2-9x+14}=\frac{x^2-x+3x-3}{x^2+5x-2x-10}\cdot\frac{x^2-2x-7x+14}{x^2+3x+4x+12}=$

$$=\frac{(x-1)(x+3)(x-2)(x-7)}{(x+5)(x-2)(x+3)(x+4)}=\frac{(x-1)(x-7)}{(x+5)(x+4)}.$$

40. a) $Q=\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-xy+y^2}:\frac{x-y}{x^3+y^3}=\frac{(x-y)^2}{x^2-xy+y^2}\cdot\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x-y}=$

$=(x-y)(x+y)=x^2-y^2.$

b) $Q=\frac{3x^2+3xy}{x^2+xy+y^2}:\frac{x+y}{x^3-y^3}=\frac{3x(x+y)}{x^2+xy+y^2}\cdot\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x+y}$

$=3x(x-y).$

41. a) $\dfrac{x+1}{x+2}:\dfrac{x+2}{x+3}:\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x+1}{x+2}\cdot\dfrac{x+3}{x+2}\cdot\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^2}$;

b) $\dfrac{x+1}{x+2}:\left(\dfrac{x+2}{x+3}:\dfrac{x+3}{x+1}\right)=\dfrac{x+1}{x+2}:\dfrac{(x+2)(x+1)}{(x+3)^2}$

$$=\dfrac{x+1}{x+2}\cdot\dfrac{(x+3)^2}{(x+2)(x+1)}=\dfrac{(x+3)^2}{(x+2)^2}\ ;$$

c) $\dfrac{x+1}{x+2}\cdot\dfrac{x+2}{x+3}:\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x+1}{x+2}\cdot\dfrac{x+2}{x+3}\cdot\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{(x+1)^2}{(x+3)^2}$;

d) $\dfrac{x+1}{x+2}\cdot\left(\dfrac{x+2}{x+3}:\dfrac{x+3}{x+1}\right)=\dfrac{x+1}{x+2}\cdot\left(\dfrac{x+2}{x+3}\cdot\dfrac{x+1}{x+3}\right)$

$$=\dfrac{x+1}{x+2}\cdot\dfrac{(x+2)(x+1)}{(x+3)^2}=\dfrac{(x+1)^2}{(x+3)^2}\ ;$$

e) $\dfrac{x+1}{x+2}:\dfrac{x+2}{x+3}\cdot\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x+1}{x+2}\cdot\dfrac{x+3}{x+2}\cdot\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{(x+3)^2}{(x+2)^2}$;

f) $\dfrac{x+1}{x+2}:\left(\dfrac{x+2}{x+3}\cdot\dfrac{x+3}{x+1}\right)=\dfrac{x+1}{x+2}:\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{x+1}{x+2}\cdot\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^2}$.

42. Gọi quãng đường từ Hà Nội đến Huế là y(km) thì quãng đường từ Huế đến TP. Hồ Chí Minh là y + 411(km). Mặt khác, y + y + 411 = x. Do đó :

a) Quãng đường từ Hà Nội đến Huế là : $y=\dfrac{x-411}{2}$ (km) ;

Quãng đường từ Huế đến TP. Hồ Chí Minh là :

$$\dfrac{x-411}{2}+411=\dfrac{x+411}{2}\ \text{(km)}\ ;$$

b) Vận tốc của con tàu thứ hai là :

$$\dfrac{x+411}{2}:20=\dfrac{x+411}{40}\ \text{(km/h)}\ ;$$

c) Thời gian đi của con tàu thứ hai từ Hà Nội đến Huế là :

$$\frac{x-411}{2}:\frac{x+411}{40}=\frac{20(x-411)}{x+411}\text{ (h) ;}$$

d) Thời gian đi của con tàu thứ nhất từ TP. Hồ Chí Minh đến Huế là :

$$\frac{20(x-411)}{x+411}+8=\frac{28x-12.411}{x+411}\text{ (h) ;}$$

e) Vận tốc của con tàu thứ nhất là :

$$\frac{x+411}{2}:\frac{28x-12.411}{x+411}=\frac{(x+411)^2}{8(7x-1233)}\text{ (km/h) ;}$$

f) Thời gian đi của con tàu thứ nhất từ Huế đến Hà Nội là :

$$\frac{x-411}{2}:\frac{(x+411)^2}{8(7x-1233)}=\frac{4(x-411)(7x-1233)}{(x+411)^2}\text{ (h).}$$

43. *HD :* Đổi phép chia thành phép nhân với phân thức nghịch đảo, ta trở về bài toán tương tự như bài tập 35.

ĐS : Phân thức phải điền vào là : $\frac{x}{x+5}$.

Bài tập bổ sung

8.1. Không.

8.2. *Giải* : a) $P=\frac{4x^2+4x+1}{x-2}.\frac{4x^2-16}{2x+1}=\frac{(2x+1)^2.4(x-2)(x+2)}{(x-2)(2x+1)}$

$$=4(x+2)(2x+1).$$

b) $P=\frac{2x^2+4x+8}{x^3-3x^2-x+3}:\frac{x^3-8}{(x+1)(x-3)}$

$$=\frac{2(x^2+2x+4)}{(x-1)(x+1)(x-3)}.\frac{(x+1)(x-3)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{2}{(x-1)(x-2)}.$$

§9. Biến đổi các biểu thức hữu tỉ. Giá trị của phân thức

44. a) $\frac{1}{2}+\left[x:\left(1-\frac{x}{x+2}\right)\right]=\frac{1}{2}+\left(x:\frac{x+2-x}{x+2}\right)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{x(x+2)}{2}=\frac{x^2+2x+1}{2}=\frac{(x+1)^2}{2}\ ;$$

b) $\left(x-\frac{1}{x^2}\right):\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{x^3-1}{x^2}:\frac{x^2+x+1}{x^2}$

$$=\frac{(x-1)(x^2+x+1).x^2}{x^2(x^2+x+1)}=x-1\ ;$$

c) $\left(1-\frac{2y}{x}+\frac{y^2}{x^2}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2}:\frac{y-x}{xy}$

$$=\frac{(y-x)^2}{x^2}\cdot\frac{xy}{y-x}=\frac{y(y-x)}{x}\ ;$$

d) $\left(\frac{x}{4}-1+\frac{3}{4x}\right):\left(\frac{x}{2}-\frac{6}{x}+\frac{1}{2}\right)=\frac{x^2-4x+3}{4x}:\frac{x^2+x-12}{2x}$

$$=\frac{x^2-x-3x+3}{4x}\cdot\frac{2x}{x^2-3x+4x-12}$$

$$=\frac{(x-1)(x-3)2x}{4x(x-3)(x+4)}=\frac{x-1}{2(x+4)}.$$

45. a) $\left(\frac{5x+y}{x^2-5xy}+\frac{5x-y}{x^2+5xy}\right)\cdot\frac{x^2-25y^2}{x^2+y^2}=$

$$=\left(\frac{5x+y}{x(x-5y)}+\frac{5x-y}{x(x+5y)}\right)\cdot\frac{(x-5y)(x+5y)}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{(5x+y)(x+5y)+(5x-y)(x-5y)}{x(x-5y)(x+5y)}\cdot\frac{(x-5y)(x+5y)}{x^2+y^2}=\frac{10(x^2+y^2)}{x(x^2+y^2)}=\frac{10}{x}\ ;$$

b) $\frac{4xy}{y^2-x^2}:\left(\frac{1}{x^2+2xy+y^2}-\frac{1}{x^2-y^2}\right)=$

$$=\frac{4xy}{(y-x)(y+x)}:\left(\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{1}{(x-y)(x+y)}\right)=$$

$$=\frac{4xy}{(y-x)(y+x)}:\frac{x-y-x-y}{(x-y)(x+y)^2}=\frac{4xy}{(y-x)(y+x)}\cdot\frac{(x-y)(x+y)^2}{-2y}=2x(x+y)\ ;$$

c) $\left[\dfrac{1}{(2x-y)^2}+\dfrac{2}{4x^2-y^2}+\dfrac{1}{(2x+y)^2}\right]\cdot\dfrac{4x^2+4xy+y^2}{16x}=$

$$=\frac{(2x+y)^2+2(4x^2-y^2)+(2x-y)^2}{(2x-y)^2(2x+y)^2}\cdot\frac{(2x+y)^2}{16x}$$

$$=\frac{16x^2}{16x(2x-y)^2}=\frac{x}{(2x-y)^2}\ ;$$

d) $\left(\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{4}{x^2+4x+4}\right):\left(\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{1}{2-x}\right)=$

$$=\frac{2(x+2)-4}{(x+2)^2}:\frac{2-(x+2)}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\frac{2x}{(x+2)^2}:\frac{-x}{(x-2)(x+2)}=\frac{2x}{(x+2)^2}\cdot\frac{(2-x)(2+x)}{x}=\frac{2(2-x)}{x+2}.$$

46. a) x nhận mọi giá trị ; b) $x \neq -2004$;

c) $x \neq \dfrac{7}{3}$; d) $x \neq -z$.

47. a) $x \neq 0,\ x \neq \dfrac{2}{3}$;

b) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = (2x + 1)^3 \neq 0$ khi $x \neq -\dfrac{1}{2}$;

c) $16 - 24x + 9x^2 = (4 - 3x)^2 \neq 0$ khi $x \neq \dfrac{4}{3}$;

d) $x^2 - 4y^2 = (x - 2y)(x + 2y) \neq 0$ khi $x \neq \pm 2y$.

48. $2x - 2 \neq 0$ khi $x \neq 1$, $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \neq 0$ khi $x \neq 1$, $(x - 1)(x^2 + 1) \neq 0$ khi $x \neq 1$. Vậy biến x trong ba phân thức này có cùng một điều kiện $x \neq 1$ là đúng.

49. a) Tập hợp các số nguyên lẻ lớn hơn 5 và nhỏ hơn 10 là {7 ; 9}.

Có thể chọn phân thức $\dfrac{1}{(x-7)(x-9)}$;

b) $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \neq 0$ khi $x \neq \pm\sqrt{2}$.

Do đó có thể chọn phân thức $\dfrac{1}{x^2 - 2}$.

50. Chỉ việc chọn hai phân thức nghịch đảo nhau với tử và mẫu đều chứa biến x và không có giá trị nào của x để tử và mẫu đồng thời bằng 0. Chẳng hạn, $\dfrac{x-1}{x+1}$ và $\dfrac{x+1}{x-1}$. Có vô số cặp phân thức như thế.

51. a) Điều kiện của x là $x \neq \dfrac{1}{3}$.

$\dfrac{3x^2 - x}{9x^2 - 6x + 1} = \dfrac{x}{3x-1}$. Với x = – 8 biểu thức có giá trị bằng : $\dfrac{-8}{3(-8)-1} = \dfrac{8}{25}$;

b) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = x^2(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(x + 1)(x - 1) \neq 0$ khi $x \neq -2$, $x \neq -1$, $x \neq 1$. Do đó điều kiện của x là $x \neq -2$, $x \neq -1$, $x \neq 1$.

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}.$$

Với x = 1 000 001, biểu thức có giá trị bằng : $\dfrac{1}{1\,000\,001 - 1} = \dfrac{1}{1\,000\,000}$.

52. a) Điều kiện $x \neq \pm y$. Ta có $\dfrac{x^2 - y^2}{(x+y)(6x-6y)} = \dfrac{1}{6}$.

b) Vì $a \neq -\dfrac{3}{2}$ nên

$$4ax + 6x + 9y + 6ay = 2x(2a + 3) + 3y(2a + 3) = (2a + 3)(2x + 3y) \neq 0$$

khi $x \neq -\dfrac{3}{2}y$. Vậy khi $x \neq -\dfrac{3}{2}y$ thì

$$\frac{2ax - 2x - 3y + 3ay}{4ax + 6x + 9y + 6ay} = \frac{(a-1)(2x+3y)}{(2a+3)(2x+3y)} = \frac{a-1}{2a+3}.$$

53. Điều kiện $x \neq 0$, $x \neq 2$.

$$\frac{4x^2 - 4x^3 + x^4}{x^3 - 2x^2} = \frac{x^2(x-2)^2}{x^2(x-2)} = x - 2.$$

a) Nếu phân thức có giá trị bằng –2 thì biểu thức x – 2 cũng có giá trị bằng – 2. Nhưng x – 2 = –2 khi x = 0 không thoả mãn điều kiện của x. Vậy không có giá trị nào của x để phân thức có giá trị bằng –2.

b) Tương tự x – 2 = 2 khi x = 4. Vì x = 4 thoả mãn điều kiện nên đó là giá trị phải tìm.

c) Tương tự x – 2 = 0 khi x = 2 (không thoả mãn điều kiện). Vậy không có giá trị nào của x để phân thức có giá trị bằng 0.

54. a) Điều kiện : $x \neq 0$, $x \neq -5$.

b) $$\frac{x^2+2x}{2x+10}+\frac{x-5}{x}+\frac{50-5x}{2x(x+5)}=\frac{x^3+2x^2+2x^2-50+50-5x}{2x(x+5)}$$

$$=\frac{x(x^2+2x+2x-5)}{2x(x+5)}=\frac{x^2-x+5x-5}{2(x+5)}=$$

$$=\frac{(x-1)(x+5)}{2(x+5)}=\frac{x-1}{2}.$$

Nếu giá trị của biểu thức bằng 1 thì giá trị của $\frac{x-1}{2}$ cũng bằng 1. Ta có : $\frac{x-1}{2}=1$ khi x – 1 = 2 hay x = 3. Vì x = 3 thoả mãn điều kiện nên đó là giá trị phải tìm.

c) Lập luận tương tự $\frac{x-1}{2}=-\frac{1}{2}$ khi x – 1 = –1 hay x = 0 (không thoả mãn điều kiện). Vậy không có giá trị nào của x để phân thức có giá trị bằng $-\frac{1}{2}$.

d) Tương tự $\frac{x-1}{2}=-3$ khi x – 1 = – 6 hay x = –5 (không thoả mãn điều kiện). Vậy không có giá trị nào của x để phân thức có giá trị bằng – 3.

55. a) Điều kiện : $x \neq -1$, $x \neq 1$.

$$\frac{2x+1}{x^2-2x+1}-\frac{2x+3}{x^2-1}=\frac{(2x+1)(x+1)-(2x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x^2+3x+1-2x^2-x+3}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{2x+4}{(x+1)(x-1)^2}.$$

Biểu thức bằng 0 khi tử số bằng 0 và mẫu số khác 0. Ta có : 2x + 4 = 0 khi x = – 2. Vì x = – 2 thoả mãn điều kiện nên mẫu có giá trị khác 0.

Vậy x = – 2 là giá trị phải tìm.

b) Điều kiện : $x \neq -3$, $x \neq 3$.

$$\frac{3}{x-3} - \frac{6x}{9-x^2} + \frac{x}{x+3} = \frac{3(x+3)+6x+x(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{3x+9+6x+x^2-3x}{(x-3)(x+3)} = \frac{x^2+6x+9}{(x-3)(x+3)} = \frac{x+3}{x-3}.$$

Lập luận tương tự như câu a), $\frac{x+3}{x-3} = 0$ khi x + 3 = 0 và $x - 3 \neq 0$, tức là khi x = –3 (không thoả mãn điều kiện). Vậy không có giá trị nào của x để phân thức có giá trị bằng 0.

56. a) Điều kiện : $x \neq -2$, $x \neq 2$.

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{3}{(x+2)^2} = \frac{x^2+2x+3x-6}{(x-2)(x+2)^2} = \frac{x^2-x+6x-6}{(x-2)(x+2)^2} = \frac{(x-1)(x+6)}{(x-2)(x+2)^2}.$$

$\frac{(x-1)(x+6)}{(x-2)(x+2)^2} = 0$ khi $(x-1)(x+6) = 0$ và $(x-2)(x+2) \neq 0$.

Vậy x = 1, x = – 6 là các giá trị cần tìm.

b) x = 0.

57. a) x – 3 là ước của 2. Tập các ước của 2 là {–2, –1, 1, 2}.

Nếu x – 3 = – 2 thì x = 1 ; Nếu x – 3 = –1 thì x = 2.

Nếu x – 3 = 1 thì x = 4 ; Nếu x – 3 = 2 thì x = 5.

ĐS : x = 1, x = 2, x = 4, x = 5.

b) x + 2 là ước của 3. Tập hợp các ước của 3 là {–3, –1, 1, 3}.

ĐS : x = – 5, x = – 3, x = –1, x = 1.

c) $\frac{3x^3-4x^2+x-1}{x-4} = 3x^2+8x+33+\frac{131}{x-4}$. Vì 131 là một số nguyên tố nên tập hợp các ước của 131 là {–1, 1, –131, 131}.

ĐS : x = 3, x = 5, x = –127, x = 135.

Bài tập bổ sung

9.1. Chọn (C).

9.2. *Giải :* a) Điều kiện $x \neq 0$, $x \neq -\frac{1}{2}$.

Khi đó ta có $1 + x^2 + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$.

Suy ra $x^2 = 1$. Vậy $x = \pm 1$.

b) Điều kiện $x \neq -1$, $x \neq 1$. Khi đó ta có $1 + x^2 - \frac{4}{x+1} = 2 - \frac{4}{x+1}$.

Suy ra $x^2 = 1$. Do đó $x = \pm 1$. Nhưng $x = \pm 1$, không thoả mãn điều kiện của biến. Vậy không có giá trị nào của x để giá trị tương ứng của biểu thức bằng 1.

Bài tập ôn chương II

58. a) $\left(\frac{9}{x^3 - 9x} + \frac{1}{x+3}\right) : \left(\frac{x-3}{x^2+3x} - \frac{x}{3x+9}\right) = \frac{9 + x(x-3)}{x(x-3)(x+3)} : \frac{3(x-3) - x^2}{3x(x+3)} =$

$= \frac{x^2 - 3x + 9}{x(x-3)(x+3)} \cdot \frac{3x(x+3)}{-x^2 + 3x - 9} = \frac{3}{3-x}$;

b) $\left(\frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+2}\right) \cdot \frac{x^2+4x+4}{8} = \frac{2(x+2) - 2(x-2)}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x+2)^2}{8}$

$= \frac{8(x+2)^2}{8(x-2)(x+2)} = \frac{x+2}{x-2}$;

c) $\left(\frac{3x}{1-3x} + \frac{2x}{3x+1}\right) : \frac{6x^2 + 10x}{1 - 6x + 9x^2} = \frac{3x(3x+1) + 2x(1-3x)}{(1-3x)(1+3x)} : \frac{2x(3x+5)}{(1-3x)^2} =$

$= \frac{3x^2 + 5x}{(1-3x)(1+3x)} \cdot \frac{(1-3x)^2}{2x(3x+5)} = \frac{1-3x}{2(1+3x)}$;

d) $\left(\frac{x}{x^2-25}-\frac{x-5}{x^2+5x}\right):\frac{2x-5}{x^2+5x}+\frac{x}{5-x}=$

$=\frac{x.x-(x-5)^2}{x(x-5)(x+5)}\cdot\frac{x^2+5x}{2x-5}+\frac{x}{5-x}=$

$=\frac{10x-25}{x(x-5)(x+5)}\cdot\frac{x(x+5)}{2x-5}+\frac{x}{5-x}=\frac{5}{x-5}+\frac{-x}{x-5}=\frac{5-x}{x-5}=-1$;

e) $\left(\frac{x^2+xy}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}+\frac{y}{x^2+y^2}\right):\left(\frac{1}{x-y}-\frac{2xy}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}\right)=$

$=\left[\frac{x^2+xy}{(x+y)(x^2+y^2)}+\frac{y}{x^2+y^2}\right]:\left[\frac{1}{x-y}-\frac{2xy}{(x-y)(x^2+y^2)}\right]=$

$=\frac{x+y}{x^2+y^2}:\frac{x^2+y^2-2xy}{(x-y)(x^2+y^2)}$

$=\frac{x+y}{x^2+y^2}\cdot\frac{(x-y)(x^2+y^2)}{(x-y)^2}=\frac{x+y}{x-y}.$

59. a) $\left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8}-\frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right).\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)=$

$=\left[\frac{x^2-2x}{2(x^2+4)}-\frac{2x^2}{2(x^2+4)-x(x^2+4)}\right].\frac{x^2-x-2}{x^2}=$

$=\left[\frac{x^2-2x}{2(x^2+4)}-\frac{2x^2}{(2-x)(x^2+4)}\right].\frac{x^2-x-2}{x^2}$

$=\frac{(x^2-2x)(2-x)-4x^2}{2(2-x)(x^2+4)}\cdot\frac{x^2+x-2x-2}{x^2}$

$=\frac{-x(x^2+4)}{2(2-x)(x^2+4)}\cdot\frac{(x+1)(x-2)}{x^2}=\frac{x+1}{2x}$;

b) $\left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1}\cdot\left(\frac{x+1}{3x} - x - 1\right)\right] : \frac{x-1}{x} =$

$= \left(\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1}\cdot\frac{x+1}{3x} + \frac{2}{x+1}\cdot\frac{x+1}{1}\right)\cdot\frac{x}{x-1} =$

$= \left(\frac{2}{3x} - \frac{2}{3x} + 2\right)\cdot\frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$;

c) $\left[\frac{2}{(x+1)^3}\left(\frac{1}{x}+1\right) + \frac{1}{x^2+2x+1}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right] : \frac{x-1}{x^3} =$

$= \left[\frac{2}{(x+1)^3}\cdot\frac{1+x}{x} + \frac{1}{(x+1)^2}\cdot\frac{1+x^2}{x^2}\right]\cdot\frac{x^3}{x-1}$

$= \left[\frac{2}{x(x+1)^2} + \frac{x^2+1}{x^2(x+1)^2}\right]\cdot\frac{x^3}{x-1} = \frac{(x^2+2x+1).x^3}{x^2(x+1)^2(x-1)} = \frac{x}{x-1}$.

60. a) $\left(\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x}\right) : \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}\right) = \frac{x^2-x^2+1}{x(x-1)} : \frac{x^2-x^2+1}{x(x+1)}$

$= \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$;

b) $\left(\frac{5}{4} - \frac{5}{x+1}\right) : \frac{9-x^2}{x^2+2x+1} = \frac{5x+5-20}{4(x+1)}\cdot\frac{(x+1)^2}{9-x^2}$

$= \frac{5(x-3)(x+1)^2}{4(x+1)(3-x)(3+x)} = -\frac{5(x+1)}{4(x+3)}$.

61. a) $x = \pm\frac{1}{7}$; b) $x = \frac{2}{3}$.

62. a) Điều kiện : $x \neq -2, x \neq 1$; b) $x \neq 0, x \neq 1$;

c) $x \neq 0, x \neq 5$; d) $x \neq -5, x \neq 5$.

63. a) $x = \frac{3}{2}$;

b) Không có giá trị nào của x để giá trị của biểu thức bằng 0 vì $x^2 + 1 \geq 1$ với mọi giá trị của x ;

c) $x = -5$, ($x^2 - 25 = 0$ khi $x = 5$ hoặc $x = -5$, nhưng khi $x = 5$ thì giá trị của mẫu cũng bằng 0, giá trị của phân thức không xác định ; do đó giá trị của phân thức bằng 0 chỉ khi $x = -5$) ;

d) Không có giá trị nào của x để giá trị của biểu thức bằng 0.

64. *HD :* Giá trị của biểu thức $\frac{P}{Q}$ được xác định khi giá trị của P xác định còn giá trị của Q xác định và khác 0.

a) Giá trị của $x - \frac{1}{x}$ xác định khi $x \neq 0$, còn giá trị của

$$\frac{x^2+2x+1}{x} - \frac{2x+2}{x} = \frac{x^2-1}{x}$$

xác định và khác 0 khi $x \neq 0$ và $x^2 - 1 \neq 0$. Do đó điều kiện của x là : $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$. Với điều kiện đó ta có :

$$\frac{x - \frac{1}{x}}{\frac{x^2+2x+1}{x} - \frac{2x+2}{x}} = \frac{x^2-1}{x} : \frac{x^2-1}{x} = 1 \text{ ;}$$

b) $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}$ có giá trị xác định khi $x \neq \pm 1$,

$\frac{2x+2}{x-1} - \frac{4x}{x^2-1} = \frac{2(x+1)^2 - 4x}{(x-1)(x+1)} = \frac{2(x^2+1)}{(x-1)(x+1)}$ có giá trị xác định và khác 0 cũng khi $x \neq \pm 1$.

Do đó điều kiện của x là $x \neq 1$, $x \neq -1$. Ta có :

$$\frac{\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{2x+2}{x-1}-\dfrac{4x}{x^2-1}}=\frac{\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}}{\dfrac{2(x^2+1)}{(x-1)(x+1)}}=\frac{1}{2}\ ;$$

c) Điều kiện : $x \neq 1$, $x \neq -1$. Ta có :

$$\frac{1}{x-1}-\frac{x^3-x}{x^2+1}\left(\frac{x}{x^2-2x+1}-\frac{1}{x^2-1}\right)=\frac{1}{x-1}-\frac{x(x^2-1)}{x^2+1}\cdot\frac{x(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)^2}=$$

$$=\frac{1}{x-1}-\frac{x(x-1)(x+1)}{x^2+1}\cdot\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x-1}=\frac{1-x}{x-1}=-1\ ;$$

d) Điều kiện : $x \neq -6$, $x \neq 6$, $x \neq 3$, $x \neq 0$. Ta có :

$$\left(\frac{x}{x^2-36}-\frac{x-6}{x^2+6x}\right):\frac{2x-6}{x^2+6x}+\frac{x}{6-x}=\frac{x^2-(x-6)^2}{x(x-6)(x+6)}\cdot\frac{x(x+6)}{2(x-3)}+\frac{x}{6-x}=$$

$$=\frac{12x-36}{2(x-6)(x-3)}+\frac{x}{6-x}=\frac{6}{x-6}+\frac{-x}{x-6}=\frac{6-x}{x-6}=-1.$$

65. a) Biểu thức $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$ xác định khi $x \neq 0$.

$$\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{2}{x+1}\cdot\left(\frac{1}{x}+1\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{2}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x}=\frac{x^2+2x+1}{x^2}=\frac{(x+1)^2}{x^2}.$$

Biểu thức này xác định và khác 0 khi $x \neq 0$ và $x \neq -1$.

Vậy điều kiện của x là $x \neq 0$, $x \neq -1$.

Ta có : $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2:\left[\dfrac{x^2+1}{x^2}+\dfrac{2}{x+1}\left(\dfrac{1}{x}+1\right)\right]=\dfrac{(x+1)^2}{x^2}:\dfrac{(x+1)^2}{x^2}=1.$

b) Với điều kiện $x \neq 0, x \neq \pm 3, x \neq -\frac{3}{2}$ ta có :

$$\frac{x}{x-3}-\frac{x^2+3x}{2x+3}\cdot\left(\frac{x+3}{x^2-3x}-\frac{x}{x^2-9}\right)=\frac{x}{x-3}-\frac{x(x+3)}{2x+3}\cdot\frac{(x+3)^2-x^2}{x(x-3)(x+3)}=$$

$$=\frac{x}{x-3}-\frac{x(x+3)}{2x+3}\cdot\frac{6x+9}{x(x-3)(x+3)}=\frac{x}{x-3}-\frac{3}{x-3}=\frac{x-3}{x-3}=1.$$

66. a) Với điều kiện $x \neq 1, x \neq -1$ ta có :

$$\frac{x+2}{x-1}\cdot\left(\frac{x^3}{2x+2}+1\right)-\frac{8x+7}{2x^2-2}=\frac{x+2}{x-1}\cdot\frac{x^3+2x+2}{2(x+1)}-\frac{8x+7}{2(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{x^4+2x^3+2x^2+6x+4-8x-7}{2(x-1)(x+1)}=\frac{x^4+2x^3+2x^2-2x-3}{2(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{x^4-x^2+2x^3-2x+3x^2-3}{2(x-1)(x+1)}=\frac{x^2(x^2-1)+2x(x^2-1)+3(x^2-1)}{2(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{(x+1)(x-1)(x^2+2x+3)}{2(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+2x+3}{2}.$$

Vì $x^2+2x+3=x^2+2x+1+2=(x+1)^2+2 \geq 2$ với mọi giá trị của x nên giá trị của biểu thức đã cho luôn dương với mọi giá trị của x khác ± 1.

b) Với điều kiện $x \neq 0, x \neq -3$ ta có :

$$\frac{1-x^2}{x}\cdot\left(\frac{x^2}{x+3}-1\right)+\frac{3x^2-14x+3}{x^2+3x}=\frac{1-x^2}{x}\cdot\frac{x^2-x-3}{x+3}+\frac{3x^2-14x+3}{x(x+3)}=$$

$$=\frac{-x^4+x^3+4x^2-x-3+3x^2-14x+3}{x(x+3)}=\frac{-x^4+x^3+7x^2-15x}{x(x+3)}=$$

$$=-\frac{x(x^3-x^2-7x+15)}{x(x+3)}=-\frac{x^3+3x^2-4x^2-12x+5x+15}{x+3}=$$

$$=\frac{-(x+3)(x^2-4x+5)}{x+3}=-(x^2-4x+5).$$

Vì $x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1 > 0$ với mọi giá trị của x nên giá trị của biểu thức luôn luôn âm với mọi giá trị khác 0 và khác –3 của x.

67. a) Với điều kiện $x \neq 0$, $x \neq 2$ ta có :

$$\frac{x^2}{x-2}\cdot\left(\frac{x^2+4}{x}-4\right)+3=\frac{x^2}{x-2}\cdot\frac{x^2+4-4x}{x}+3=\frac{x^2(x-2)^2}{x(x-2)}+3$$

$$=x(x-2)+3=x^2-2x+1+2=(x-1)^2+2.$$

Ta có $(x - 1)^2 + 2 \geq 2$ với mọi giá trị của x và có giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 1$. Vì $x = 1$ thoả mãn điều kiện nên biểu thức đã cho có giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 1$.

b) Với điều kiện $x \neq -2$, $x \neq 0$, ta có :

$$\frac{(x+2)^2}{x}\cdot\left(1-\frac{x^2}{x+2}\right)-\frac{x^2+6x+4}{x}=\frac{(x+2)^2}{x}\cdot\frac{x+2-x^2}{x+2}-\frac{x^2+6x+4}{x}$$

$$=\frac{(x+2)(-x^2+x+2)}{x}-\frac{x^2+6x+4}{x}$$

$$=\frac{-x^3-x^2+4x+4-x^2-6x-4}{x}$$

$$=\frac{-x^3-2x^2-2x}{x}=-(x^2+2x+2).$$

Vì $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x + 1)^2 + 1$ nên biểu thức có giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi $x = -1$.

Vì $x = -1$ thoả mãn điều kiện nên biểu thức đã cho có giá trị lớn nhất bằng –1 khi $x = -1$.

Bài tập bổ sung

II.1. *Giải* : $$P=\left[\left(\frac{x-y}{2y-x}-\frac{x^2+y^2+y-2}{(x+y)(x-2y)}\right):\frac{(2x^2+y+2)(2x^2+y-2)}{(x+y)(x+1)}\right]$$

$$:\frac{x+1}{2x^2+y+2}$$

$$= \left(\frac{(x-y)(x+y)+x^2+y^2+y-2}{(x+y)(2y-x)} \cdot \frac{(x+y)(x+1)}{(2x^2+y+2)(2x^2+y-2)} \right) \cdot \frac{2x^2+y+2}{x+1}$$

$$= \left(\frac{2x^2+y-2}{2y-x} \cdot \frac{x+1}{2x^2+y-2} \right) \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2y-x}.$$

Tại $x = -1,76$ và $y = \frac{3}{25}$ thì giá trị của Q là $\frac{1}{2}$.

II.2. *Giải* : Ta có $(a-b)(c^2+bc-a^2-ab) = (a-b)[(c^2-a^2)+(bc-ab)]$

$= (a-b)(c-a)(a+b+c).$

Tương tự : $(b-c)(a^2+ac-b^2-bc) = (b-c)(a-b)(a+b+c),$

$(c-a)(b^2+ab-c^2-ac) = (c-a)(b-c)(a+b+c).$

MTC $= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$

Kí hiệu biểu thức đã cho bởi Q, ta có :

$$Q = \frac{c-a+a-b+b-c}{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)} = 0.$$

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I
TỨ GIÁC

ĐỀ BÀI

§1. Tứ giác

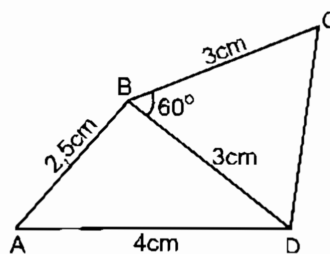
1. Tính tổng các góc ngoài của tứ giác (tại mỗi đỉnh của tứ giác chỉ chọn một góc ngoài).

2. Tứ giác ABCD có AB = BC, CD = DA.

a) Chứng minh rằng BD là đường trung trực của AC.

b) Cho biết $\widehat{B} = 100^o$, $\widehat{D} = 70^o$, tính $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$.

3. Vẽ lại tứ giác ABCD ở hình 1 vào vở bằng cách vẽ hai tam giác.



Hình 1

4. Tính các góc của tứ giác ABCD, biết rằng :

$\widehat{A} : \widehat{B} : \widehat{C} : \widehat{D} = 1 : 2 : 3 : 4.$

5. Tứ giác ABCD có $\widehat{A} = 65^o$, $\widehat{B} = 117^o$, $\widehat{C} = 71^o$. Tính số đo góc ngoài tại đỉnh D.

6. Chứng minh rằng các góc của một tứ giác không thể đều là góc nhọn, không thể đều là góc tù.

7. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng tổng hai góc ngoài tại các đỉnh A và C bằng tổng hai góc trong tại các đỉnh B và D.

8. Tứ giác ABCD có $\widehat{A} = 110^o$, $\widehat{B} = 100^o$. Các tia phân giác của các góc C và D cắt nhau ở E. Các đường phân giác của các góc ngoài tại các đỉnh C và D cắt nhau ở F. Tính $\widehat{CED}$, $\widehat{CFD}$.

9. Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai đường chéo lớn hơn tổng hai cạnh đối.

10*. Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tứ giác ấy.

Bài tập bổ sung

1.1. Tứ giác ABCD có $\hat{B} = \hat{A} + 10^o$, $\hat{C} = \hat{B} + 10^o$, $\hat{D} = \hat{C} + 10^o$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

(A) $\hat{A} = 65^o$; (B) $\hat{B} = 85^o$; (C) $\hat{C} = 100^o$; (D) $\hat{D} = 90^o$.

1.2. Tứ giác ABCD có $\hat{C} = 60^o$, $\hat{D} = 80^o$, $\hat{A} - \hat{B} = 10^o$. Tính số đo các góc A và B.

1.3. Tứ giác ABCD có chu vi 66cm. Tính độ dài AC, biết chu vi tam giác ABC bằng 56cm, chu vi tam giác ACD bằng 60cm.

§2. Hình thang

11. Tính các góc của hình thang ABCD (AB // CD), biết rằng $\hat{A} = 3\hat{D}$, $\hat{B} - \hat{C} = 30^o$.

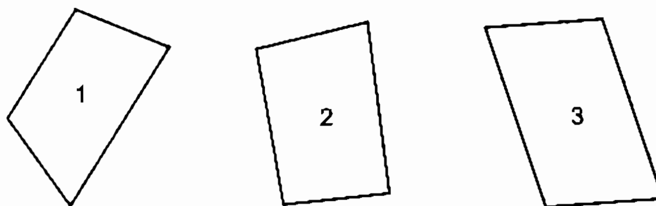
12. Tứ giác ABCD có BC = CD và DB là tia phân giác của góc D. Chứng minh rằng ABCD là hình thang.

13. Dùng thước và êke kiểm tra xem trong các tứ giác trên hình 2 :

a) Tứ giác nào chỉ có một cặp cạnh song song ;

b) Tứ giác nào có hai cặp cạnh song song ;

c) Tứ giác nào là hình thang.



Hình 2

14. Tính các góc B và D của hình thang ABCD, biết rằng $\hat{A} = 60^o$, $\hat{C} = 130^o$.

15. Chứng minh rằng trong hình thang có nhiều nhất là hai góc tù, có nhiều nhất là hai góc nhọn.

16. Chứng minh rằng trong hình thang các tia phân giác của hai góc kề một cạnh bên vuông góc với nhau.

17. Cho tam giác ABC. Các tia phân giác của các góc B và C cắt nhau ở I. Qua I kẻ đường thẳng song song với BC, cắt các cạnh AB và AC ở D và E.

a) Tìm các hình thang trong hình vẽ.

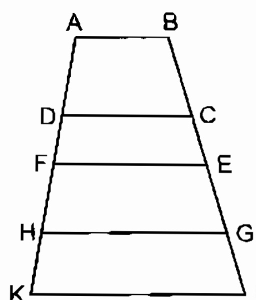
b) Chứng minh rằng hình thang BDEC có một cạnh đáy bằng tổng hai cạnh bên.

18. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Ở phía ngoài tam giác ABC, vẽ tam giác BCD vuông cân tại B. Tứ giác ABDC là hình gì ? Vì sao ?

19. Hình thang vuông ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$, AB = AD = 2cm, DC = 4cm. Tính các góc của hình thang.

20. Chứng minh rằng tổng hai cạnh bên của hình thang lớn hơn hiệu hai đáy.

21. Trên hình 3 có bao nhiêu hình thang ?



Hình 3

Bài tập bổ sung

2.1. Hình thang ABCD (BC // AD) có $\widehat{C} = 3\widehat{D}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

(A) $\widehat{A} = 45^o$; (B) $\widehat{B} = 45^o$; (C) $\widehat{D} = 45^o$; (D) $\widehat{D} = 60^o$.

2.2. Hình thang ABCD (AB // CD) có $\widehat{A} - \widehat{D} = 40^o$, $\widehat{A} = 2\widehat{C}$. Tính các góc của hình thang.

2.3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, BC = 2cm. Ở phía ngoài tam giác ABC, vẽ tam giác ACE vuông cân tại E.

a) Chứng minh rằng AECB là hình thang vuông.

b) Tính các góc và các cạnh của hình thang AECB.

§3. Hình thang cân

22. Hình thang cân ABCD có AB // CD, AB < CD. Kẻ các đường cao AH, BK. Chứng minh rằng DH = CK.

23. Hình thang cân ABCD có AB // CD, O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng OA = OB, OC = OD.

24. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các cạnh bên AB, AC lấy các điểm M, N sao cho BM = CN.

a) Tứ giác BMNC là hình gì ? Vì sao ?

b) Tính các góc của tứ giác BMNC biết rằng $\widehat{A} = 40^o$.

25. Cho tam giác ABC cân tại A, các đường phân giác BE, CF. Chứng minh rằng BFEC là hình thang cân có đáy nhỏ bằng cạnh bên.

26. Chứng minh rằng hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

27. Tính các góc của hình thang cân, biết một góc bằng 50^o.

28. Hình thang cân ABCD có đáy nhỏ AB bằng cạnh bên AD. Chứng minh rằng CA là tia phân giác của góc C.

29. Hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại O. Biết rằng OA = OC, OB = OD. Tứ giác ACBD là hình gì ? Vì sao ?

30. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D trên cạnh AB, điểm E trên cạnh AC sao cho AD = AE.

a) Tứ giác BDEC là hình gì ? Vì sao ?

b) Các điểm D, E ở vị trí nào thì BD = DE = EC ?

31. Hình thang cân ABCD có O là giao điểm của hai đường thẳng chứa cạnh bên AD, BC và E là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng OE là đường trung trực của hai đáy.

32. a) Hình thang cân ABCD có đáy nhỏ AB = b, đáy lớn CD = a, đường cao AH. Chứng minh rằng $HD = \dfrac{a-b}{2}$, $HC = \dfrac{a+b}{2}$ (a và b có cùng đơn vị đo).

b) Tính đường cao của hình thang cân có hai đáy 10cm, 26cm và cạnh bên 17cm.

33. Hình thang cân ABCD có đường chéo DB vuông góc với cạnh bên BC, DB là tia phân giác của góc D. Tính chu vi của hình thang, biết BC = 3cm.

Bài tập bổ sung

3.1. Hình thang cân ABCD (AB // CD) có $\widehat{A} = 70^o$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

(A) $\widehat{C} = 110^o$; (B) $\widehat{B} = 110^o$; (C) $\widehat{C} = 70^o$; (D) $\widehat{D} = 70^o$.

3.2. Hình thang cân ABCD (AB // CD) có hai đường chéo cắt nhau tại I, hai đường thẳng chứa các cạnh bên cắt nhau ở K. Chứng minh rằng KI là đường trung trực của hai đáy.

3.3. Hình thang cân ABCD (AB // CD) có $\widehat{C} = 60^\circ$, DB là tia phân giác của góc D. Tính các cạnh của hình thang, biết chu vi hình thang bằng 20cm.

§4. Đường trung bình của tam giác, của hình thang

34. Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh AC sao cho $AD = \frac{1}{2}DC$. Gọi M là trung điểm của BC, I là giao điểm của BD và AM. Chứng minh rằng AI = IM.

35. Hình thang ABCD có đáy AB, CD. Gọi E, F, I theo thứ tự là trung điểm của AD, BC, AC. Chứng minh rằng ba điểm E, I, F thẳng hàng.

36. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, I theo thứ tự là trung điểm của AD, BC, AC. Chứng minh rằng :

a) EI // CD, IF // AB ;

b) $EF \le \frac{AB + CD}{2}$.

37. Cho hình thang ABCD (AB // CD), M là trung điểm của AD, N là trung điểm của BC. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của MN với BD, AC. Cho biết AB = 6cm, CD = 14cm. Tính các độ dài MI, IK, KN.

38. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD và CE cắt nhau ở G. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của GB, GC. Chứng minh rằng DE // IK, DE = IK.

39. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi D là trung điểm của AM, E là giao điểm của BD và AC. Chứng minh rằng $AE = \frac{1}{2}EC$.

40. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD, CE. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BE, CD. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của MN với BD, CE. Chứng minh rằng MI = IK = KN.

41. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm của hai đường chéo và đi qua trung điểm của cạnh bên thứ hai.

42. Chứng minh rằng trong hình thang mà hai đáy không bằng nhau, đoạn thẳng nối trung điểm của hai đường chéo bằng nửa hiệu hai đáy.

43. Hình thang ABCD có AB // CD, AB = a, BC = b, CD = c, DA = d. Các đường phân giác của các góc ngoài đỉnh A và D cắt nhau tại M, các đường phân giác của các góc ngoài đỉnh B và C cắt nhau tại N.

a) Chứng minh rằng MN // CD.

b) Tính độ dài MN theo a, b, c, d (a, b, c, d có cùng đơn vị đo).

44. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi O là trung điểm của AM. Qua O kẻ đường thẳng d cắt các cạnh AB và AC. Gọi AA', BB', CC' là các đường vuông góc kẻ từ A, B, C đến đường thẳng d. Chứng minh rằng :

$$AA' = \frac{BB' + CC'}{2}.$$

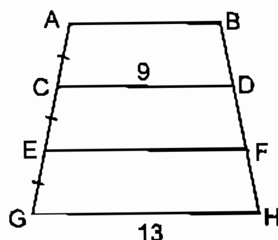
Bài tập bổ sung

4.1. Trên hình bs.1, ta có AB // CD // EF // GH và AC = CE = EG. Biết CD = 9, GH = 13. Các độ dài AB và EF bằng :

(A) 8 và 10 ; (B) 6 và 12 ;

(C) 7 và 11 ; (D) 7 và 12.

Hãy chọn phương án đúng.



Hình bs.1

4.2. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B có khoảng cách đến đường thẳng d theo thứ tự là 20cm và 6cm. Gọi C là trung điểm của AB. Tính khoảng cách từ C đến đường thẳng d.

4.3. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho BD = AB. Gọi K là giao điểm của DM và AC. Chứng minh rằng AK = 2KC.

§5. Dựng hình bằng thước và compa. Dựng hình thang

45. Dựng tam giác ABC vuông tại A, biết cạnh huyền BC = 5cm và $\widehat{B} = 35^o$.

46. Dựng tam giác ABC vuông tại A, biết cạnh huyền BC = 4,5cm và cạnh góc vuông AC = 2cm.

47. Dựng góc 30^o bằng thước và compa.

48. Dựng hình thang cân ABCD (AB // CD), biết CD = 3cm, AC = 4cm, $\widehat{D} = 70^o$.

49. Dựng hình thang ABCD (AB // CD), biết $\widehat{D} = 90^o$, AD = 2cm, CD = 4cm, BC = 3cm.

50. Dựng tam giác ABC cân tại A, biết BC = 3cm, đường cao BH = 2,5cm.

51. Dựng tam giác ABC, biết $\widehat{B} = 40^o$, BC = 4cm, AC = 3cm.

52. Dựng hình thang ABCD (AB // CD), biết AD = 2cm, CD = 4cm, BC = 2,5cm, AC = 3,5cm.

53. Dựng hình thang cân ABCD (AB // CD), biết AD = 2cm, CD = 4cm, AC = 3,5cm.

54. Dựng hình thang cân ABCD (AB // CD), biết hai đáy AB = 2cm, CD = 4cm, đường cao AH = 2cm.

55*. Dựng hình thang ABCD, biết hai đáy AB = 2cm, CD = 4cm, $\widehat{C} = 50^o$, $\widehat{D} = 70^o$.

56*. Dựng hình thang ABCD, biết hai đáy AB = 1cm, CD = 4cm, hai cạnh bên AD = 2cm, BC = 3cm.

57*. Dựng hình thang cân ABCD, biết hai đáy AB = 1cm, CD = 3cm, đường chéo BD = 3cm.

58. Dựng tứ giác ABCD, biết AB = 2cm, AD = 3cm, $\widehat{A} = 80^o$, $\widehat{B} = 120^o$, $\widehat{C} = 100^o$.

59. Dựng góc 75^o bằng thước và compa.

Bài tập bổ sung

5.1. Dựng hình thang cân ABCD (AB // CD) biết BC = 3cm, AB = 2cm, đường cao bằng 2,5cm.

5.2*. Dựng tam giác ABC biết $\widehat{B} = 80^o$, BC = 3cm, AB + AC = 5cm.

§6. Đối xứng trục

60. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 70^o$, điểm M thuộc cạnh BC. Vẽ điểm D đối xứng với M qua AB, vẽ điểm E đối xứng với M qua AC.

a) Chứng minh rằng AD = AE.

b) Tính số đo góc DAE.

61. Cho tam giác nhọn ABC có $\widehat{A} = 60^{o}$, trực tâm H. Gọi M là điểm đối xứng với H qua BC.

a) Chứng minh $\Delta BHC = \Delta BMC$.

b) Tính $\widehat{BMC}$.

62. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^{o}$). Gọi H là điểm đối xứng với B qua AD, I là giao điểm của CH và AD. Chứng minh rằng $\widehat{AIB} = \widehat{DIC}$.

63. Cho hai điểm A, B thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng xy (AB không vuông góc với xy). Gọi A' là điểm đối xứng với A qua xy, C là giao điểm của A'B và xy. Gọi M là điểm bất kì khác C thuộc đường thẳng xy. Chứng minh rằng AC + CB < AM + MB.

64. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Trên cạnh AB lấy điểm I, trên cạnh AC lấy điểm K sao cho AI = AK. Chứng minh rằng điểm I đối xứng với điểm K qua AH.

65. Tứ giác ABCD có AB = BC, CD = DA (hình cái diều). Chứng minh rằng điểm A đối xứng với điểm C qua đường thẳng BD.

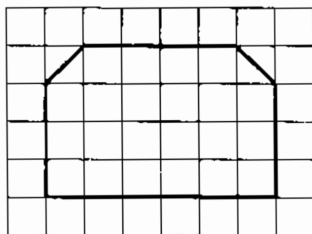
66. Tam giác ABC có AB < AC. Gọi d là đường trung trực của BC. Vẽ điểm K đối xứng với điểm A qua đường thẳng d.

a) Tìm các đoạn thẳng đối xứng với đoạn thẳng AB qua d, đối xứng với đoạn thẳng AC qua d.

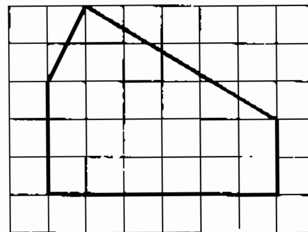
b) Tứ giác AKCB là hình gì ? Vì sao ?

67. Cho tam giác ABC. Điểm M nằm trên đường phân giác của góc ngoài đỉnh C (M khác C). Chứng minh rằng AC + CB < AM + MB.

68. Trong các hình nét đậm vẽ trên giấy kẻ ô vuông ở hình 4, hình 5, hình nào có trục đối xứng ?

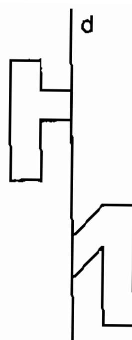


Hình 4



Hình 5

69. Vẽ hình đối xứng qua đường thẳng d của hình đã vẽ (h.6).



Hình 6

70. Điền dấu "×" vào ô thích hợp :

Câu khẳng định	Đúng	Sai
a) Tam giác có một trục đối xứng là tam giác cân	...	...
b) Tứ giác có một trục đối xứng là hình thang cân	...	...

71. Chứng minh rằng giao điểm hai đường chéo của hình thang cân nằm trên trục đối xứng của hình thang cân.

72*. Cho góc nhọn xOy, điểm A nằm trong góc đó. Dựng điểm B thuộc tia Ox, điểm C thuộc tia Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

Bài tập bổ sung

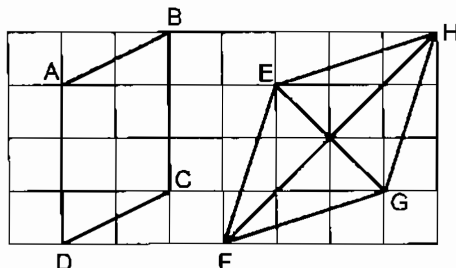
6.1. Hãy nối mỗi ô của cột bên trái với một ô của cột bên phải để được khẳng định đúng.

1) Trục đối xứng của tam giác ABC (AB = BC) là	A) đường trung trực của AB.
2) Trục đối xứng của hình thang cân ABCD (AB // CD) là	B) đường trung trực của BC.
	C) đường trung trực của AC.

6.2. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D, trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho AD = AE. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng D đối xứng với E qua AM.

§7. Hình bình hành

73. Các tứ giác ABCD, EFGH vẽ trên giấy kẻ ô vuông ở hình 7 có là hình bình hành hay không ?

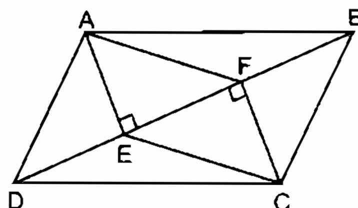


Hình 7

74. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là trung điểm của AB, F là trung điểm của CD. Chứng minh rằng DE = BF.

75. Cho hình bình hành ABCD. Tia phân giác của góc A cắt CD ở M. Tia phân giác của góc C cắt AB ở N. Chứng minh rằng AMCN là hình bình hành.

76. Trên hình 8, cho ABCD là hình bình hành. Chứng minh rằng AECF là hình bình hành.



Hình 8

77. Tứ giác ABCD có E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tứ giác EFGH là hình gì ? Vì sao ?

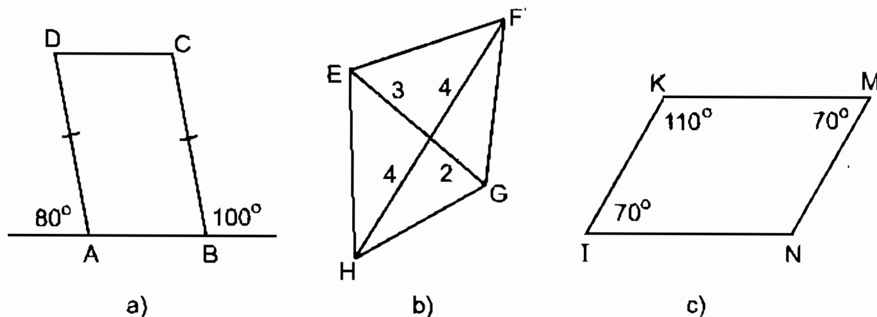
78. Cho hình bình hành ABCD. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của CD, AB. Đường chéo BD cắt AI, CK theo thứ tự ở E, F. Chứng minh rằng DE = EF = FB.

79. Tính các góc của hình bình hành ABCD, biết :

a) $\widehat{A} = 110^\circ$;

b) $\widehat{A} - \widehat{B} = 20^\circ$.

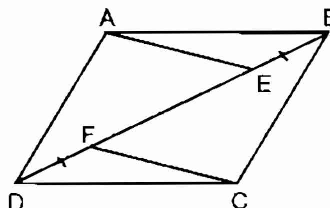
80. Trong các tứ giác trên hình 9, tứ giác nào là hình bình hành ?



Hình 9

81. Chu vi hình bình hành ABCD bằng 10cm, chu vi tam giác ABD bằng 9cm. Tính độ dài BD.

82. Trên hình 10, cho ABCD là hình bình hành. Chứng minh rằng AE // CF.



Hình 10

83. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE. Chứng minh rằng :

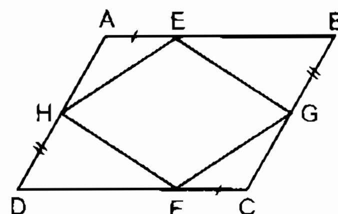
a) EMFN là hình bình hành.

b) Các đường thẳng AC, EF, MN đồng quy.

84. Trên hình 11, cho ABCD là hình bình hành. Chứng minh rằng :

a) EGFH là hình bình hành.

b) Các đường thẳng AC, BD, EF, GH đồng quy.



Hình 11

85*. Cho hình bình hành ABCD. Qua C kẻ đường thẳng xy chỉ có một điểm chung C với hình bình hành. Gọi AA', BB', DD' là các đường vuông góc kẻ từ A, B, D đến đường thẳng xy. Chứng minh rằng AA' = BB' + DD'.

86*. Cho hình bình hành ABCD và đường thẳng xy không có điểm chung với hình bình hành. Gọi AA', BB', CC', DD' là các đường vuông góc kẻ từ A, B, C, D đến đường thẳng xy. Tìm mối liên hệ độ dài giữa AA', BB', CC', DD'.

87*. Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{A} = \alpha > 90^{0}$. Ở phía ngoài hình bình hành, vẽ các tam giác đều ADF, ABE.

a) Tính $\widehat{EAF}$.

b) Chứng minh rằng tam giác CEF là tam giác đều.

88*. Cho tam giác ABC. Ở phía ngoài tam giác, vẽ các tam giác vuông cân tại A là ABD, ACE. Vẽ hình bình hành ADIE. Chứng minh rằng :

a) IA = BC ; b) IA ⊥ BC.

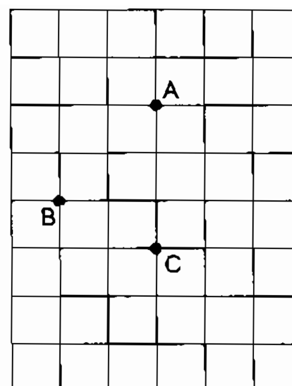
89. Dựng hình bình hành ABCD, biết :

a) AB = 2cm, AD = 3cm, $\widehat{A} = 110^0$.

b) AC = 4cm, BD = 5cm, $\widehat{BOC} = 50^0$ (O là giao điểm của hai đường chéo).

90. Cho ba điểm A, B, C trên giấy kẻ ô vuông (h.12). Hãy vẽ điểm thứ tư M sao cho A, B, C, M là bốn đỉnh của một hình bình hành.

91*. Cho tam giác ABC. Dựng đường thẳng song song với BC, cắt cạnh AB ở E, cắt cạnh AC ở F sao cho BE = AF.



Hình 12

Bài tập bổ sung

7.1. Tứ giác ABCD là hình bình hành nếu :

(A) AB = CD ; (B) AD = BC ;

(C) AB // CD và AD = BC ; (D) AB = CD và AD = BC.

Hãy chọn phương án đúng.

7.2. Cho hình bình hành ABCD, các đường chéo cắt nhau tại O. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của OD, OB. Gọi K là giao điểm của AE và CD. Chứng minh rằng :

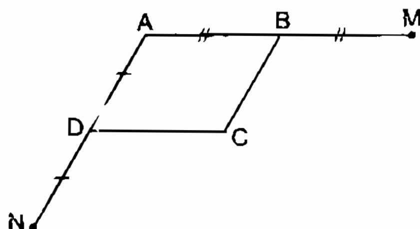
a) AE song song với CF.

b) $DK = \frac{1}{2}KC$.

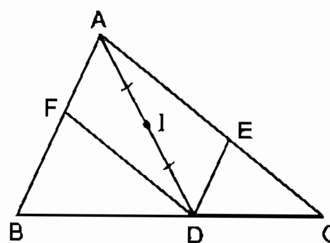
7.3. Cho hình bình hành ABCD. Lấy điểm E trên cạnh AB, điểm F trên cạnh CD sao cho AE = CF. Chứng minh rằng ba đường thẳng AC, BD, EF đồng quy.

§8. Đối xứng tâm

92. Cho hình 13 trong đó ABCD là hình bình hành. Chứng minh rằng điểm M đối xứng với điểm N qua điểm C.



Hình 13



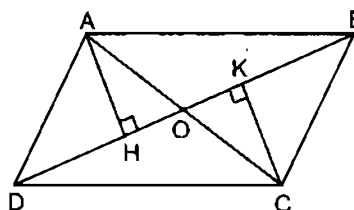
Hình 14

93. Cho hình 14 trong đó DE // AB, DF // AC. Chứng minh rằng điểm E đối xứng với điểm F qua điểm I.

94. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BM, CN. Gọi D là điểm đối xứng với B qua M, gọi E là điểm đối xứng với C qua N. Chứng minh rằng điểm D đối xứng với điểm E qua điểm A.

95. Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm D thuộc cạnh BC. Gọi E là điểm đối xứng với D qua AB, gọi F là điểm đối xứng với D qua AC. Chứng minh rằng các điểm E và F đối xứng với nhau qua điểm A.

96. Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Một đường thẳng đi qua O cắt hai cạnh đối AD, BC ở E, F. Chứng minh rằng các điểm E và F đối xứng với nhau qua điểm O.



Hình 15

97. Cho hình 15 trong đó ABCD là hình bình hành. Chứng minh rằng các điểm H và K đối xứng với nhau qua điểm O.

98. Cho tam giác ABC, D là trung điểm của AB, E là trung điểm của AC. Gọi O là một điểm bất kì nằm trong tam giác ABC. Vẽ điểm M đối xứng với O qua D, vẽ điểm N đối xứng với O qua E. Chứng minh rằng MNCB là hình bình hành.

99. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau ở G. Gọi H là điểm đối xứng với G qua D, I là điểm đối xứng với G qua E, K là điểm đối xứng với G qua F. Tìm các điểm đối xứng với A, với B, với C qua G.

100. Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Qua O, vẽ đường thẳng cắt hai cạnh AB, CD ở E, F. Qua O vẽ đường thẳng cắt hai cạnh AD, BC ở G, H. Chứng minh rằng EGFH là hình bình hành.

101. Cho góc xOy, điểm A nằm trong góc đó. Vẽ điểm B đối xứng với A qua Ox, vẽ điểm C đối xứng với A qua Oy.

a) Chứng minh rằng OB = OC.

b) Tính số đo góc xOy để B đối xứng với C qua O.

102. Cho tam giác ABC có trực tâm H. Gọi M là trung điểm của BC, K là điểm đối xứng với H qua M. Tính số đo các góc ABK, ACK.

103. Trong các hình sau, hình nào có tâm đối xứng ? Với các hình đó, hãy chỉ rõ tâm đối xứng của hình.

a) Đoạn thẳng AB.

b) Tam giác đều ABC.

c) Đường tròn tâm O.

104. Cho góc xOy và điểm A nằm trong góc đó.

a) Vẽ điểm B đối xứng với O qua A. Qua B kẻ đường thẳng song song với Ox, cắt Oy ở C. Gọi D là giao điểm của CA và Ox. Chứng minh rằng các điểm C và D đối xứng với nhau qua điểm A.

b) Từ đó suy ra cách dựng đường thẳng đi qua A, cắt Ox, Oy ở D, C sao cho A là trung điểm của CD.

105. Cho tam giác ABC, điểm M nằm trên cạnh BC. Gọi O là trung điểm của AM. Dựng điểm E thuộc cạnh AB, điểm F thuộc cạnh AC sao cho E đối xứng với F qua O.

Bài tập bổ sung

8.1. Xét tính đúng – sai của mỗi khẳng định sau :

a) Trung điểm của một đoạn thẳng là tâm đối xứng của đoạn thẳng đó.

b) Giao điểm hai đường chéo của một hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó.

c) Trọng tâm của một tam giác là tâm đối xứng của tam giác đó.

d) Tâm của một đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

8.2. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM và trọng tâm G. Gọi I là điểm đối xứng với A qua G.

Chứng minh rằng I là điểm đối xứng với G qua M.

§9. Hình chữ nhật

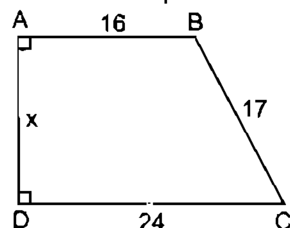
106. Tính đường chéo d của một hình chữ nhật, biết độ dài các cạnh a = 3cm, b = 5cm (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

107. Chứng minh rằng trong hình chữ nhật :

a) Giao điểm của hai đường chéo là tâm đối xứng của hình.

b) Hai đường thẳng đi qua trung điểm của hai cạnh đối là hai trục đối xứng của hình.

108. Tính độ dài đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của một tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng 5cm và 10cm (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



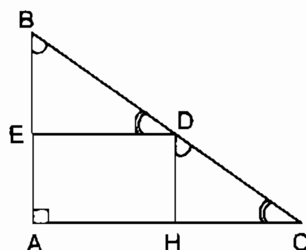
Hình 16

109. Tính x trên hình 16 (đơn vị đo : cm).

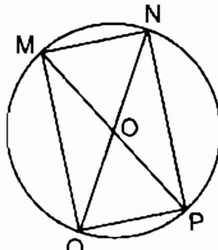
110. Chứng minh rằng các tia phân giác các góc của một hình bình hành cắt nhau tạo thành một hình chữ nhật.

111. Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tứ giác EFGH là hình gì ? Vì sao ?

112. Tìm các hình chữ nhật trên hình 17 (trong hình 17b, O là tâm của đường tròn).



a)



b)

Hình 17

113. Các câu sau đúng hay sai ?

a) Hình chữ nhật là tứ giác có tất cả các góc bằng nhau.

b) Tứ giác có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

c) Tứ giác có hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình chữ nhật.

114. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, AC = 4cm, điểm M thuộc cạnh BC. Gọi D, E theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC.

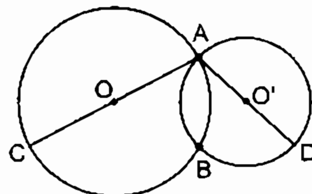
a) Tứ giác ADME là hình gì ? Tính chu vi của tứ giác đó.

b) Điểm M ở vị trí nào trên cạnh BC thì đoạn thẳng DE có độ dài nhỏ nhất ?

115. Cho tam giác ABC cân tại A, các đường trung tuyến BM, CN cắt nhau tại G. Gọi D là điểm đối xứng với G qua M, gọi E là điểm đối xứng với G qua N. Tứ giác BEDC là hình gì ? Vì sao ?

116. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BD. Biết HD = 2cm, HB = 6cm. Tính các độ dài AD, AB (làm tròn đến hàng đơn vị).

117. Chứng minh rằng ba điểm C, B, D trên hình 18 thẳng hàng.



Hình 18

118. Tứ giác ABCD có $AB \perp CD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của BC, BD, AD, AC. Chứng minh rằng EG = FH.

119. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Gọi D, E, M theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, BC. Chứng minh rằng tứ giác DEMH là hình thang cân.

120. Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm D thuộc cạnh AC. Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của BD, BC, DC. Chứng minh rằng tứ giác AEFG là hình thang cân.

121*. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BD, CE. Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ B, C đến đường thẳng DE. Chứng minh rằng EH = DK.

HD : Vẽ điểm I là trung điểm của DE, điểm M là trung điểm của BC.

122*. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC.

a) Chứng minh rằng AH = DE.

b) Gọi I là trung điểm của HB, K là trung điểm của HC. Chứng minh rằng DI // EK.

123*. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, đường trung tuyến AM.

a) Chứng minh rằng $\widehat{HAB} = \widehat{MAC}$.

b) Gọi D, E theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC. Chứng minh rằng AM vuông góc với DE.

Bài tập bổ sung

9.1. Một hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng 4cm và 6cm. Độ dài đường chéo của hình chữ nhật đó bằng bao nhiêu xentimét ?

(A) 8cm ; (B) $\sqrt{52}$cm ; (C) 9cm ; (D) $\sqrt{42}$cm.

Hãy chọn phương án đúng.

9.2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Tính số đo góc IHK.

9.3. Cho hình thang cân ABCD, đường cao AH. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh bên AD, BC. Chứng minh rằng EFCH là hình bình hành.

§10. Đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước

124. Cho đoạn thẳng AB. Kẻ tia Ax bất kì, lấy các điểm C, D, E sao cho AC = CD = DE. Qua C và D kẻ các đường thẳng song song với EB. Chứng minh rằng đoạn thẳng AB bị chia ra ba phần bằng nhau.

125. Cho góc vuông xOy, điểm A trên tia Oy. Điểm B di chuyển trên tia Ox. Gọi C là điểm đối xứng với A qua B. Điểm C di chuyển trên đường nào ?

126. Cho tam giác ABC, điểm M di chuyển trên cạnh BC. Gọi I là trung điểm của AM. Điểm I di chuyển trên đường nào ?

127. Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm M thuộc cạnh BC. Gọi D, E theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC.

a) So sánh các độ dài AM, DE.

b) Tìm vị trí của điểm M trên cạnh BC để DE có độ dài nhỏ nhất.

128. Cho điểm A nằm ngoài đường thẳng d. Điểm M di chuyển trên đường thẳng d. Gọi B là điểm đối xứng với A qua M. Điểm B di chuyển trên đường nào ?

129*. Cho đoạn thẳng AB, điểm M di chuyển trên đoạn thẳng ấy. Vẽ về một phía của AB các tam giác đều AMD, BME. Trung điểm I của DE di chuyển trên đường nào ?

130. Hình chữ nhật ABCD có cạnh AD bằng nửa đường chéo AC. Tính góc nhọn tạo bởi hai đường chéo.

131. Dựng hình chữ nhật ABCD, biết đường chéo AC = 4cm, góc tạo bởi hai đường chéo bằng 100°.

Bài tập bổ sung

10.1. Tập hợp giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật ABCD có A và B cố định là

(A) đường trung trực của AD ; (B) đường trung trực của AB ;

(C) đường trung trực của BC ; (D) đường tròn (A ; AB).

Hãy chọn phương án đúng.

10.2. Cho góc xOy cố định khác góc bẹt. Các điểm A và B theo thứ tự chuyển động trên các tia Ox và Oy sao cho OA = OB. Đường vuông góc với OA tại A và đường vuông góc với OB tại B cắt nhau ở M. Điểm M chuyển động trên đường nào ?

10.3. Xét các hình bình hành ABCD có cạnh AD cố định, cạnh AB = 2cm. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Điểm I chuyển động trên đường nào ?

§11. Hình thoi

132. Chứng minh rằng trung điểm bốn cạnh của một hình chữ nhật là đỉnh của một hình thoi.

133. Chứng minh rằng trung điểm các cạnh của một hình thoi là đỉnh của một hình chữ nhật.

134. Chứng minh rằng trong hình thoi :

a) Giao điểm của hai đường chéo là tâm đối xứng của hình thoi.

b) Hai đường chéo là hai trục đối xứng của hình thoi.

135. Tứ giác ABCD có toạ độ các đỉnh như sau : A(0 ; 2), B(3 ; 0), C(0 ; −2), D(−3 ; 0). Tứ giác ABCD là hình gì ? Tính chu vi của tứ giác đó.

136. a) Cho hình thoi ABCD. Kẻ hai đường cao AH, AK. Chứng minh rằng AH = AK.

b) Hình bình hành ABCD có hai đường cao AH, AK bằng nhau. Chứng minh rằng ABCD là hình thoi.

137. Hình thoi ABCD có $\widehat{A} = 60^{o}$. Kẻ hai đường cao BE, BF. Tam giác BEF là tam giác gì ? Vì sao ?

138. Cho hình thoi ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ O đến AB, BC, CD, DA. Tứ giác EFGH là hình gì ? Vì sao ?

139. Hình thoi ABCD có chu vi bằng 16cm, đường cao AH bằng 2cm. Tính các góc của hình thoi, biết rằng $\widehat{A} > \widehat{B}$.

140. Hình thoi ABCD có $\widehat{A} = 60^{o}$. Trên cạnh AD lấy điểm M, trên cạnh DC lấy điểm N sao cho AM = DN. Tam giác BMN là tam giác gì ? Vì sao ?

141. Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự trên các cạnh AB, AC sao cho BD = CE. Gọi M, N, I, K theo thứ tự là trung điểm của BE, CD, DE, BC. Chứng minh rằng IK vuông góc với MN.

142*. Cho hình bình hành ABCD, các đường chéo cắt nhau ở O. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là giao điểm của các đường phân giác của các tam giác AOB, BOC, COD, DOA. Chứng minh rằng EFGH là hình thoi.

143. Dựng hình thoi ABCD, biết cạnh bằng 2cm, một đường chéo bằng 3cm.

Bài tập bổ sung

11.1. Cạnh của một hình thoi bằng 25, một đường chéo bằng 14. Đường chéo kia bằng :

(A) 24 ; (B) 48 ; (C) $\sqrt{429}$; (D) Một đáp số khác.

Hãy chọn phương án đúng.

11.2. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD). Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tứ giác EFGH là hình gì ?

11.3. Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh BC. Qua D kẻ đường thẳng song song với AC, cắt AB ở I. Qua D kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AC ở K.

a) Tứ giác AIDK là hình gì ?

b) Điểm D ở vị trí nào trên cạnh BC thì AIDK là hình thoi ?

§12. Hình vuông

144. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD. Gọi M, N theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D đến AB, AC. Chứng minh rằng tứ giác AMDN là hình vuông.

145. Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lấy theo thứ tự các điểm E, K, P, Q sao cho AE = BK = CP = DQ. Tứ giác EKPQ là hình gì ? Vì sao ?

146. Cho tam giác ABC, điểm I nằm giữa B và C.

Qua I vẽ đường thẳng song song với AB, cắt AC ở H.

Qua I vẽ đường thẳng song song với AC, cắt AB ở K.

a) Tứ giác AHIK là hình gì ?

b) Điểm I ở vị trí nào trên cạnh BC thì tứ giác AHIK là hình thoi ?

c) Tam giác ABC có điều kiện gì thì tứ giác AHIK là hình chữ nhật ?

147. Hình chữ nhật ABCD có AB = 2AD. Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi H là giao điểm của AQ và DP, gọi K là giao điểm của CP và BQ. Chứng minh rằng PHQK là hình vuông.

148. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên cạnh BC lấy các điểm H, G sao cho BH = HG = GC. Qua H và G kẻ các đường vuông góc với BC, chúng cắt AB và AC theo thứ tự ở E và F. Tứ giác EFGH là hình gì ? Vì sao ?

149. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AD lấy điểm F, trên cạnh DC lấy điểm E sao cho AF = DE. Chứng minh rằng AE = BF và $AE \perp BF$.

150. Cho một hình chữ nhật có hai cạnh kề không bằng nhau. Chứng minh rằng các tia phân giác của các góc của hình chữ nhật đó cắt nhau tạo thành một hình vuông.

151. Cho hình vuông ABCD. Gọi E là một điểm nằm giữa C và D. Tia phân giác của góc DAE cắt CD ở F. Kẻ $FH \perp AE$ ($H \in AE$), FH cắt BC ở G.

Tính số đo góc FAG.

152. Cho hình vuông DEBC. Trên cạnh CD lấy điểm A, trên tia đối của tia DC lấy điểm K, trên tia đối của tia ED lấy điểm M sao cho CA = DK = EM. Vẽ hình vuông DKIH (H thuộc cạnh DE). Chứng minh rằng ABMI là hình vuông.

153*. Cho tam giác ABC. Vẽ ở ngoài tam giác các hình vuông ABDE, ACFH.

a) Chứng minh rằng EC = BH, EC $\perp$ BH.

b) Gọi M, N theo thứ tự là tâm của các hình vuông ABDE, ACFH. Gọi I là trung điểm của BC. Tam giác MIN là tam giác gì ? Vì sao ?

154*. Cho hình vuông ABCD, điểm E thuộc cạnh CD. Tia phân giác của góc ABE cắt AD ở K. Chứng minh rằng AK + CE = BE.

155*. Cho hình vuông ABCD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, BC.

a) Chứng minh rằng CE vuông góc với DF.

b) Gọi M là giao điểm của CE và DF. Chứng minh rằng AM = AD.

HD. Gọi K là trung điểm của CD. Chứng minh rằng KA // CE.

156*. Cho hình vuông ABCD. Vẽ điểm E trong hình vuông sao cho $\widehat{EDC} = \widehat{ECD} = 15^{o}$.

a) Vẽ điểm F trong hình vuông sao cho $\widehat{FAD} = \widehat{FDA} = 15^{o}$. Chứng minh rằng tam giác DEF là tam giác đều.

b) Chứng minh rằng tam giác ABE là tam giác đều.

Bài tập bổ sung

12.1. Hình vuông có chu vi bằng 8 thì đường chéo bằng :

(A) 2 ; (B) $\sqrt{32}$; (C) $\sqrt{8}$; (D) $\sqrt{2}$.

Hãy chọn phương án đúng.

12.2. Cho hình thoi ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Các tia phân giác của bốn góc vuông có đỉnh O cắt các cạnh AB, BC, CD, DA theo thứ tự ở E, F, G, H. Tứ giác EFGH là hình gì ?

12.3. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh DC lấy điểm E, trên cạnh BC lấy điểm F sao cho DE = CF. Chứng minh rằng AE = DF và AE $\perp$ DF.

Bài tập ôn chương I

157. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Tìm điều kiện của tứ giác ABCD để EFGH là :

a) Hình chữ nhật ; b) Hình thoi ; c) Hình vuông.

158. Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm D là trung điểm của BC. Gọi M là điểm đối xứng với D qua AB, E là giao điểm của DM và AB. Gọi N là điểm đối xứng với D qua AC, F là giao điểm của DN và AC.

a) Tứ giác AEDF là hình gì ? Vì sao ?

b) Các tứ giác ADBM, ADCN là hình gì ? Vì sao ?

c) Chứng minh rằng M đối xứng với N qua A.

d) Tam giác vuông ABC có điều kiện gì thì tứ giác AEDF là hình vuông ?

159. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với H qua AB, gọi E là điểm đối xứng với H qua AC.

a) Chứng minh rằng D đối xứng với E qua A.

b) Tam giác DHE là tam giác gì ? Vì sao ?

c) Tứ giác BDEC là hình gì ? Vì sao ?

d) Chứng minh rằng BC = BD + CE.

160. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, DC, DB. Tìm điều kiện của tứ giác ABCD để EFGH là :

a) Hình chữ nhật ; b) Hình thoi ; c) Hình vuông.

161. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD và CE cắt nhau ở G. Gọi H là trung điểm của GB, K là trung điểm của GC.

a) Chứng minh rằng tứ giác DEHK là hình bình hành.

b) Tam giác ABC có điều kiện gì thì tứ giác DEHK là hình chữ nhật ?

c) Nếu các đường trung tuyến BD và CE vuông góc với nhau thì tứ giác DEHK là hình gì ?

162. Cho hình bình hành ABCD có AB = 2AD. Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của AB và CD.

a) Các tứ giác AEFD, AECF là hình gì ? Vì sao ?

b) Gọi M là giao điểm của AF và DE, gọi N là giao điểm của BF và CE. Chứng minh rằng tứ giác EMFN là hình chữ nhật.

c) Hình bình hành ABCD nói trên có thêm điều kiện gì thì EMFN là hình vuông ?

163. Cho hình bình hành ABCD có E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD.

a) Tứ giác DEBF là hình gì ? Vì sao ?

b) Chứng minh rằng các đường thẳng AC, BD, EF cùng cắt nhau tại một điểm.

c) Gọi giao điểm của AC với DE và BF theo thứ tự là M và N. Chứng minh rằng tứ giác EMFN là hình bình hành.

164*. Cho đoạn thẳng AB = a. Gọi M là một điểm nằm giữa A và B. Vẽ về một phía của AB các hình vuông AMNP, BMLK có tâm theo thứ tự là C, D. Gọi I là trung điểm của CD.

a) Tính khoảng cách từ I đến AB.

b) Khi điểm M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì điểm I di chuyển trên đường nào ?

Bài tập bổ sung

I.1. Điền vào chỗ trống :

a) Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là ....

b) Tứ giác có hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là ....

c) Tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường là ....

I.2. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, AC.

a) Chứng minh rằng ADEF là hình thoi.

b) Tam giác ABC có thêm điều kiện gì thì ADEF là hình vuông ?

LỜI GIẢI - CHỈ DẪN - ĐÁP SỐ

§1. Tứ giác

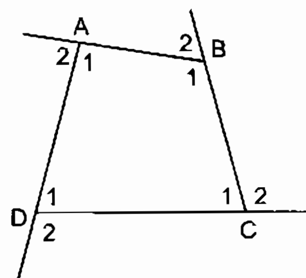
1. (h.19). Ta có $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 = 360^\circ$,

cần tính $\widehat{A}_2 + \widehat{B}_2 + \widehat{C}_2 + \widehat{D}_2$.

$\widehat{A}_2 + \widehat{B}_2 + \widehat{C}_2 + \widehat{D}_2 =$

$= (180^\circ - \widehat{A}_1) + (180^\circ - \widehat{B}_1)$

$+ (180^\circ - \widehat{C}_1) + (180^\circ - \widehat{D}_1)$

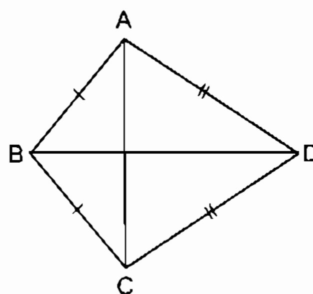


Hình 19

$= 720^o - (\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1)$

$= 720^o - 360^o = 360^o$.

Vậy tổng các góc ngoài của tứ giác bằng 360^o.



Hình 20

2. (h.20)

a) BA = BC và DA = DC nên

BD là đường trung trực của AC.

b) $\Delta ABD = \Delta CBD$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BCD}$.

Ta lại có

$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 360^o - \widehat{B} - \widehat{D}$

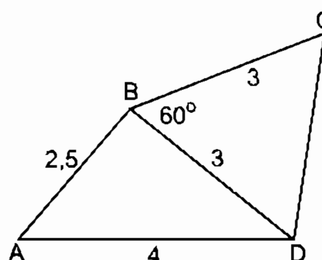
$= 360^o - 100^o - 70^o = 190^o$.

Do đó $\widehat{A} = \widehat{C} = 190^o : 2 = 95^o$.

3. (h.21). Vẽ ΔABD, biết ba cạnh :
AD = 4cm, BD = 3cm, AB = 2,5cm.

Vẽ ΔBCD, biết hai cạnh và góc xen giữa :

BD = 3cm, $\widehat{DBC} = 60^o$, BC = 3cm (A và C thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ BD).



Hình 21

4. Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau và tổng các góc của tứ giác :

$$\frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{3} = \frac{\widehat{D}}{4} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}}{1+2+3+4} = \frac{360^o}{10} = 36^o.$$

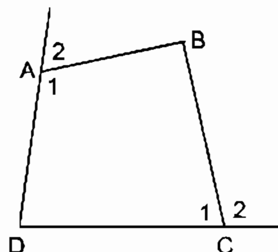
Do đó, $\widehat{A} = 36^o$, $\widehat{B} = 72^o$, $\widehat{C} = 108^o$, $\widehat{D} = 144^o$.

5. Tính góc D của tứ giác ABCD, được 107^o. Góc ngoài tại đỉnh D bằng 73^o.

6. Giả sử bốn góc của một tứ giác là bốn góc nhọn thì tổng bốn góc của tứ giác nhỏ hơn 360^o, trái với tính chất về tổng các góc của tứ giác bằng 360^o. Vậy bốn góc của tứ giác không thể đều là góc nhọn.

Học sinh tự chứng minh bốn góc của tứ giác không thể đều là góc tù.

7. (h.22). Gọi $\widehat{A}_1$ và $\widehat{C}_1$ là các góc trong tại các đỉnh A và C. Gọi $\widehat{A}_2$ và $\widehat{C}_2$ là các góc ngoài tại các đỉnh A và C.



Hình 22

Ta có : $\widehat{A}_2 + \widehat{C}_2 = (180^0 - \widehat{A}_1) + (180^0 - \widehat{C}_1)$

$= 360^0 - \widehat{A}_1 - \widehat{C}_1. \qquad (1)$

Ta lại có : $\widehat{B} + \widehat{D} = 360^0 - \widehat{A}_1 - \widehat{C}_1. \qquad (2)$

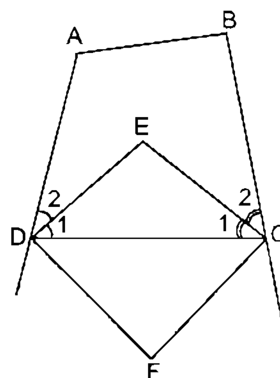
Từ (1) và (2), suy ra : $\widehat{A}_2 + \widehat{C}_2 = \widehat{B} + \widehat{D}$.

8. (h.23). Tứ giác ABCD có

$\widehat{C} + \widehat{D} = 360^0 - \widehat{A} - \widehat{B}$

$= 360^0 - 110^0 - 100^0 = 150^0$

nên $\widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 = \dfrac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2} = \dfrac{150^0}{2} = 75^0$.



Hình 23

ΔCED có $\widehat{CED} = 180^0 - (\widehat{C}_1 + \widehat{D}_1)$

$= 180^0 - 75^0 = 105^0$.

Vì DE và DF là các tia phân giác của hai góc kề bù nên DE ⊥ DF. Tương tự, CE ⊥ CF.

Xét tứ giác CEDF :

$\widehat{F} = 360^0 - \widehat{E} - \widehat{ECF} - \widehat{EDF} = 360^0 - 105^0 - 90^0 - 90^0 = 75^0$.

9. (h.24). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD của tứ giác ABCD.

Xét ΔAOB, ta có :

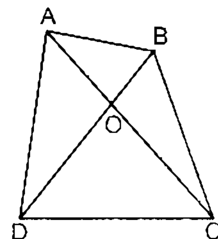
OA + OB > AB (quan hệ giữa ba cạnh của tam giác).

Xét ΔCOD, ta có : OC + OD > CD.

Suy ra : OA + OB + OC + OD > AB + CD

tức là AC + BD > AB + CD.

Chứng minh tương tự : AC + BD > AD + BC.



Hình 24

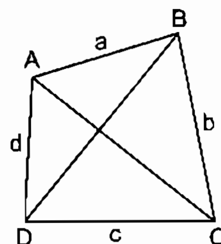
10. (h.25). Đặt AB = a, BC = b, CD = c, DA = d.

Theo bài 9 : AC + BD > a + c

AC + BD > b + d.

Do đó : $2(AC + BD) > a + c + b + d$

nên $AC + BD > \frac{a + c + b + d}{2}$.



Hình 25

Vậy tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi.

Xét ΔABC, ta có : $AC < a + b$.

Xét ΔADC, ta có : $AC < c + d$.

Suy ra : $2AC < a + b + c + d$

nên : $AC < \frac{a + b + c + d}{2}$. (1)

Tương tự : $BD < \frac{a + b + c + d}{2}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $AC + BD < a + b + c + d$.

Vậy tổng hai đường chéo nhỏ hơn chu vi.

Bài tập bổ sung

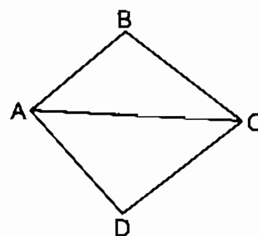
1.1. Chọn (B).

1.2. Ta có $\widehat{A} + \widehat{B} = 360^o - (\widehat{C} + \widehat{D})$

$= 360^o - (60^o + 80^o) = 220^o$.

Từ $\widehat{A} + \widehat{B} = 220^o$ và $\widehat{A} - \widehat{B} = 10^o$,

ta tính được $\widehat{A} = 115^o$, $\widehat{B} = 105^o$.



Hình bs.2

1.3. (h.bs.2)

Chu vi ΔABC + Chu vi ΔACD – Chu vi ABCD = 2AC

hay $56 + 60 - 66 = 2AC$.

Từ đó AC = 25 (cm).

§2. Hình thang

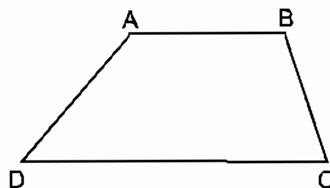
11. (h.26). Từ $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^o$, $\widehat{A} = 3\widehat{D}$,

ta tính được : $\widehat{D} = 45^o$, $\widehat{A} = 135^o$.

Từ $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^o$, $\widehat{B} - \widehat{C} = 30^o$,

ta tính được : $\widehat{C} = \frac{180^o - 30^o}{2} = 75^o$,

$\widehat{B} = 180^o - 75^o = 105^o$.



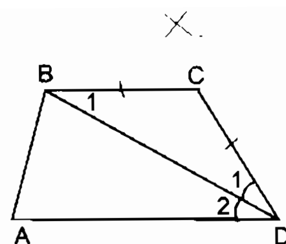
Hình 26

12. (h.27) ΔBCD có BC = CD nên là tam giác cân, suy ra $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$.

Theo giả thiết $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$.

Suy ra $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_2$, do đó BC // AD (có hai góc so le trong bằng nhau).

Vậy ABCD là hình thang.



Hình 27

13. a) Tứ giác 1 chỉ có một cặp cạnh song song.

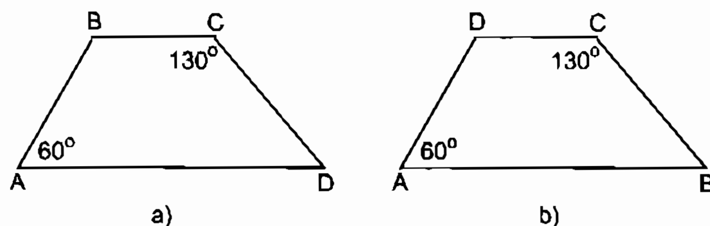
b) Tứ giác 3 có hai cặp cạnh song song.

c) Tứ giác 1 và tứ giác 3 là hình thang.

14. $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$ là hai góc đối của hình thang.

Nếu $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ là hai góc kề một cạnh bên (h.28a) thì $\widehat{B} = 120^o$, $\widehat{D} = 50^o$.

Nếu $\widehat{A}$ và $\widehat{D}$ là hai góc kề một cạnh bên (h.28b) thì $\widehat{D} = 120^o$, $\widehat{B} = 50^o$.

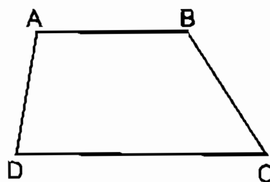


Hình 28

15. Xét hình thang ABCD có AB // CD (h.29).

$\widehat{A}$ và $\widehat{D}$ là hai góc kề cạnh bên AD, chúng có tổng bằng 180^o nên trong hai góc đó có nhiều nhất là một góc nhọn, có nhiều nhất là một góc tù.

Hai góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cũng vậy.



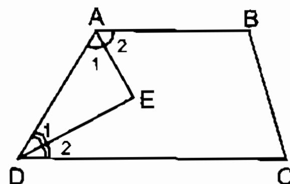
Hình 29

Do đó trong bốn góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$, có nhiều nhất là hai góc nhọn, có nhiều nhất là hai góc tù.

16. Xét hình thang ABCD có AB // CD (h.30).

Ta có $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \dfrac{1}{2}\widehat{A}$ và $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = \dfrac{1}{2}\widehat{D}$

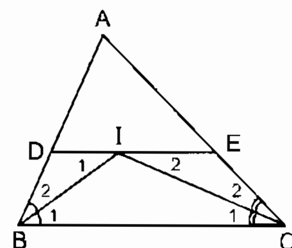
mà $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^o$



Hình 30

nên $\hat{A}_1 + \hat{D}_1 = 90^o$. ΔADE có $\hat{A}_1 + \hat{D}_1 = 90^o$

nên $\widehat{AED} = 90^o$. Vậy $AE \perp DE$.



Hình 31

17. (h.31).

a) Có ba hình thang : BDIC, BIEC, BDEC.

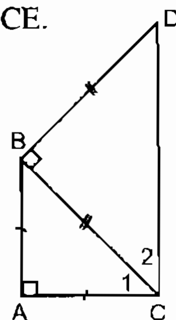
b) Ta sẽ chứng minh DE = BD + CE.

Thật vậy : DE // BC $\Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{B}_1$ (so le trong).

Ta lại có $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ nên $\hat{I}_1 = \hat{B}_2$. Do đó ΔBDI cân tại D, suy ra DI = BD. (1)

Chứng minh tương tự, ta có EI = CE. (2)

Từ (1) và (2) suy ra DI + EI = BD + CE, tức là DE = BD + CE.



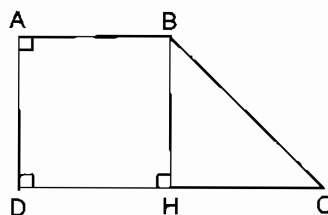
Hình 32

18. (h.32). Vì ΔABC vuông cân tại A nên $\hat{C}_1 = 45^o$.

ΔBCD vuông cân tại B nên $\hat{C}_2 = 45^o$.

Do đó $\hat{C} = 90^o$.

Tứ giác ABDC có AB // CD và $\hat{A} = 90^o$ nên là hình thang vuông.



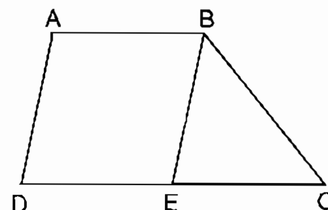
Hình 33

19. (h.33). Kẻ BH vuông góc với CD. Hình thang ABHD có hai cạnh bên AD, BH song song nên AD = BH, AB = DH.

Do đó HB = HD = 2cm. Suy ra HC = 2cm.

ΔBHC vuông cân tại H $\Rightarrow \hat{C} = 45^o$.

Suy ra $\widehat{ABC} = 135^o$.



Hình 34

20. (h.34). Kẻ BE // AD thì AD = BE, AB = DE.

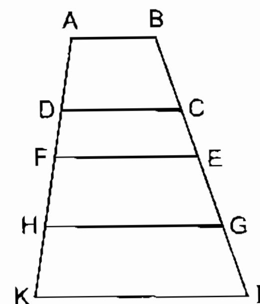
Ta có AD + BC = BE + BC,

CD – AB = CD – DE = EC.

Xét ΔBEC, ta có

BE + BC > EC nên AD + BC > CD – AB.

21. Trên hình 35 có 10 hình thang : ABCD, ABEF, ABGH, ABIK, DCEF, DCGH, DCIK, FEGH, FEIK, HGIK.



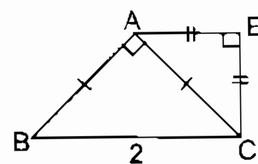
Hình 35

Bài tập bổ sung

2.1. Chọn (C).

2.2. $\widehat{A} = 110^{\circ}$, $\widehat{D} = 70^{\circ}$, $\widehat{C} = 55^{\circ}$, $\widehat{B} = 125^{\circ}$.

2.3. (h.bs.3)



Hình bs.3

a) AE // BC và $\widehat{E} = 90^{\circ}$ nên AECB là hình thang vuông.

b) $\widehat{E} = \widehat{ECB} = 90^{\circ}$, $\widehat{B} = 45^{\circ}$, $\widehat{BAE} = 135^{\circ}$.

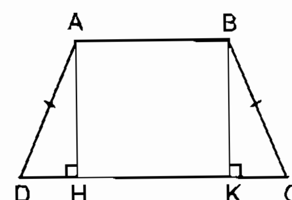
$AB = \sqrt{2}$; AE = EC = 1.

§3. Hình thang cân

22. (h.36)

$\Delta AHD = \Delta BKC$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow$ HD = KC.



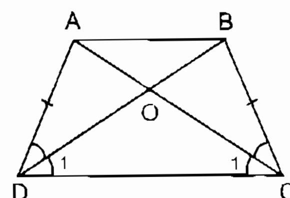
Hình 36

23. (h.37). Vì ABCD là hình thang cân nên AD = BC, $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$.

$\Delta ADC = \Delta BCD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$

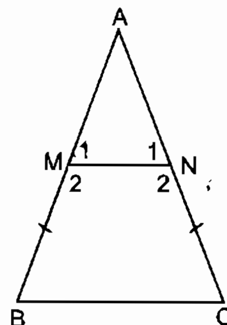
$\Rightarrow \Delta OCD$ cân $\Rightarrow$ OC = OD.

Ta lại có AC = BD nên OA = OB.



Hình 37

24. (h.38)



Hình 38

a) ΔABC cân tại A $\Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \dfrac{180^o - \hat{A}}{2}$.

Dễ chứng minh AM = AN.

ΔAMN cân tại A

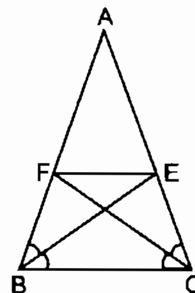
$$\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{N}_1 = \frac{180^o - \hat{A}}{2}.$$

Suy ra $\hat{B} = \widehat{M}_1$, do đó MN // BC.

Tứ giác BMNC là hình thang, lại có $\hat{B} = \hat{C}$ nên là hình thang cân.

b) $\hat{B} = \hat{C} = 70^o$, $\widehat{M}_2 = \widehat{N}_2 = 110^o$.

25. (h.39).



Hình 39

$\Delta ABE = \Delta ACF$ (g.c.g)

$\Rightarrow$ AE = AF.

Sử dụng các tam giác cân AFE, ABC để chứng minh BFEC là hình thang cân.

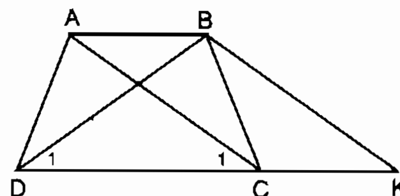
Chứng minh ΔBFE có hai góc bằng nhau để suy ra BF = FE.

26. (h.40). Xét hình thang ABCD, AB // CD, AC = BD. Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt DC ở K.

Hình thang ABKC có hai cạnh bên song song BK // AC nên BK = AC. Ta lại có AC = BD nên BK = BD, do đó ΔBDK cân.

ΔBDK cân tại B $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{K}$, AC // BK

$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{K}$ (đồng vị). Suy ra $\widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$.



Hình 40

ΔACD và ΔBDC có :

DC là cạnh chung,

$\widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$ (chứng minh trên),

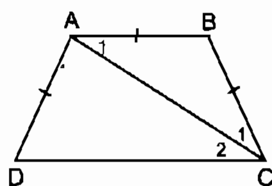
AC = BD (gt).

Do đó $\Delta ACD = \Delta BDC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{BCD}$.

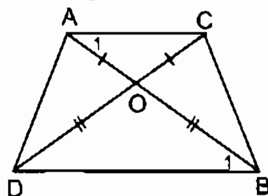
Hình thang ABCD có $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$ nên là hình thang cân.

27. *ĐS* : Các góc còn lại bằng 50°, 130°, 130°.

28. (h.41). Chứng minh rằng $\widehat{C}_1$ và $\widehat{C}_2$ cùng bằng $\widehat{A}_1$.



Hình 41



Hình 42

29. (h.42). Chứng minh rằng $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ để suy ra AC // BD. Hình thang ACBD có hai đường chéo bằng nhau AB = CD nên là hình thang cân.

30. (h.43).

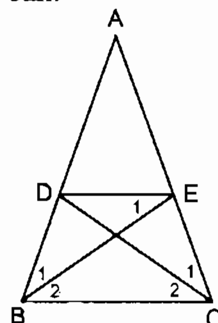
a) BDEC là hình thang cân. Học sinh tự giải thích.

b) Ta thấy : BD = DE $\Leftrightarrow \hat{B}_1 = \hat{E}_1$

$\Leftrightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (vì $\hat{E}_1 = \hat{B}_2$).

Tương tự, DE = EC $\Leftrightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$.

Như vậy, nếu BE, CD là các đường phân giác của ΔABC thì BD = DE = EC.



Hình 43

31. (h.44). Dễ dàng chứng minh được OD = OC, OA = OB nên O thuộc đường trung trực của hai đáy.

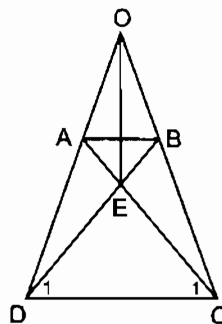
$$\Delta ADC = \Delta BCD \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1 \Rightarrow ED = EC. \qquad (1)$$

Ta lại có AC = BD nên EA = EB. (2)

Từ (1) và (2) suy ra E thuộc đường trung trực của hai đáy.

Vậy OE là đường trung trực của hai đáy.



Hình 44

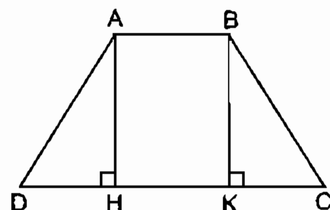
32. (h.45)

a) Kẻ đường cao BK.

ΔAHD = ΔBKC (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow$ HD = KC.

Hình thang ABKH có các cạnh bên AH, BK song song nên AB = HK.



Hình 45

Ta có a – b = DC – AB = DC – HK

= HD + KC = 2HD.

Vậy $HD = \frac{a-b}{2}$; $HC = DC - HD = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$.

b) Xét hình thang cân ABCD có đáy AB = 10cm, đáy CD = 26cm, cạnh bên AD = 17cm. Trước hết tính HD, được 8cm. Sau đó tính AH, được 15cm.

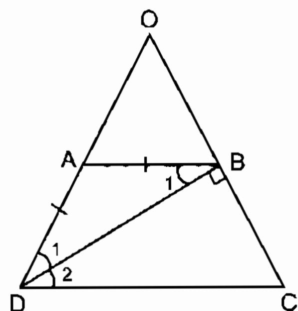
33. (h.46). Ta đã có AD = BC = 3cm. Dễ dàng chứng minh ΔABD cân nên AB = AD = 3cm. Còn phải tính độ dài CD.

Vì ΔDBC vuông tại B nên $\hat{C} + \hat{D}_2 = 90^0$. Ta lại có $\hat{C} = \hat{D} = 2\hat{D}_2$ nên $\hat{C} = 60^0$, $\hat{D}_2 = 30^0$.

Gọi O là giao điểm của AD và BC. Do ΔODC có đường phân giác DB cũng là đường cao nên là tam giác cân, lại có $\hat{C} = 60^0$ nên là tam giác đều. Do đó CD = CO = 2BC = 6cm.

Vậy chu vi hình thang ABCD bằng :

3 + 3 + 3 + 6 = 15(cm).



Hình 46

Chú ý. Ta có nhận xét :

– Nếu một tam giác vuông có một góc 30^0 thì cạnh đối diện với góc đó bằng nửa cạnh huyền (vì tam giác vuông đó bằng "nửa tam giác đều").

– Nếu một tam giác vuông có một cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền thì góc đối diện với cạnh góc vuông đó bằng 30^0 (vì tam giác vuông đó bằng "nửa tam giác đều").

Bài tập bổ sung

3.1. Chọn (A).

3.2. (h.bs.4)

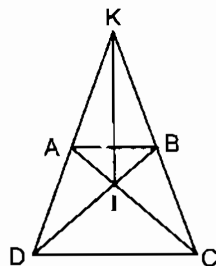
ΔACD = ΔBDC (c.c.c) suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$,

do đó ID = IC . (1)

Tam giác KCD có hai góc ở đáy bằng nhau nên KD = KC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra KI là đường trung trực của CD.

Hãy chứng minh IA = IB và KA = KB để suy ra KI là đường trung trực của AB.



Hình bs.4

3.3. (h.bs.5)

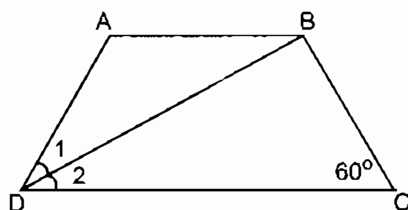
Ta có $\widehat{D} = \widehat{C} = 60^o$

nên $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = 60^o : 2 = 30^o$,

suy ra $\widehat{CBD} = 90^o$.

Tam giác vuông CBD có $\widehat{D}_2 = 30^o$

nên $BC = \frac{1}{2}CD$.



Hình bs.5

Ta chứng minh được AD = AB. Từ đó chu vi hình thang bằng 5AD.

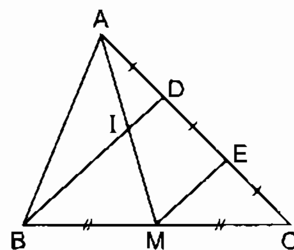
Vậy AD = AB = BC = 4cm, CD = 8cm.

§4. Đường trung bình của tam giác, của hình thang

34. (h.47).

Gọi E là trung điểm của DC. Vì ΔBDC có BM = MC, DE = EC nên BD // ME, suy ra DI // EM.

Do ΔAME có AD = DE, DI // EM nên AI = IM.

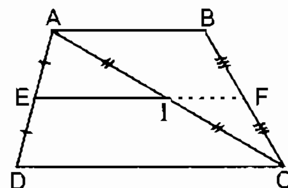


Hình 47

35. (h.48). Vì ΔADC có AE = ED, AI = IC nên EI // DC.

Tương tự, ΔABC có AI = IC, BF = FC nên IF // AB. Do AB // DC nên IF // DC.

Qua điểm I, ta có IE // DC và IF // DC nên theo tiên đề Ơ-clit : E, I, F thẳng hàng.



Hình 48

36. (h.49).

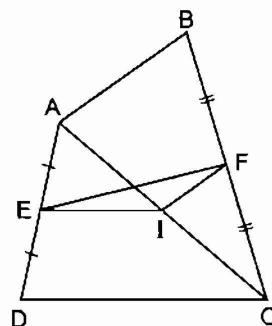
a) Vì ΔADC có AE = ED, AI = IC nên $EI // DC,\ EI = \frac{CD}{2}$. Tương tự, ΔABC có

$AI = IC,\ BF = FC$ nên $IF // AB,\ IF = \frac{AB}{2}$.

b) Trong ΔEFI ta có EF ≤ EI + IF nên

$$EF \leq \frac{CD}{2} + \frac{AB}{2}.$$

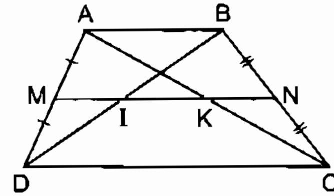
Vậy $EF \leq \frac{AB + CD}{2}$.



Hình 49

Dấu "=" xảy ra trong trường hợp E, I, F thẳng hàng, tức là AB // CD.

37. (h.50). Vì MN là đường trung bình của hình thang ABCD nên MN // AB // CD. ΔADC có AM = MD, MK // DC nên AK = KC, MK là đường trung bình. Do đó $MK = \frac{DC}{2} = \frac{14}{2} = 7(cm)$. Tương tự, ΔABD có AM = MD, MI // AB nên BI = ID, MI là đường trung bình. Do đó

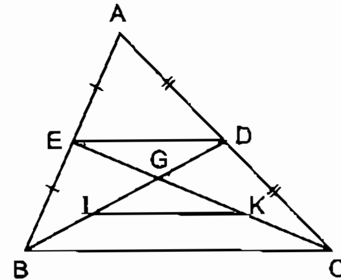


Hình 50

$$MI = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3(cm).$$

Suy ra IK = MK – MI = 7 – 3 = 4(cm). Tương tự, ΔABC có BN = NC, NK // AB nên AK = KC, KN là đường trung bình. Do đó $KN = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3(cm)$.

38. (h.51). Vì ΔABC có AE = EB, AD = DC nên ED là đường trung bình, do đó ED // BC, $ED = \frac{BC}{2}$. Tương tự, ΔGBC có GI = IB, GK = KC nên IK là đường trung bình, do đó IK // BC, $IK = \frac{BC}{2}$.



Hình 51

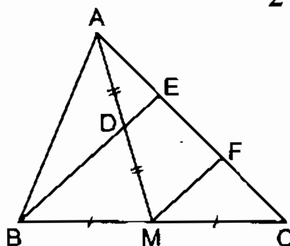
Suy ra : ED // IK (cùng song song với BC),

ED = IK (cùng bằng $\frac{BC}{2}$).

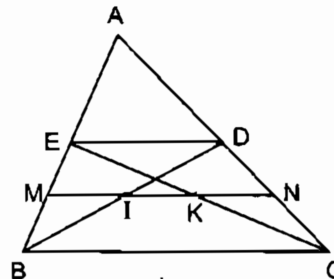
39. (h.52). Gọi F là trung điểm của EC. Vì ΔBEC có BM = MC, EF = FC nên MF // BE.

ΔAMF có AD = DM, DE // MF nên AE = EF.

Do AE = EF = FC nên $AE = \frac{1}{2}EC$.



Hình 52



Hình 53

40. (h.53). Đặt BC = a.

Vì ΔABC có AE = EB, AD = DC nên ED là đường trung bình, do đó ED // BC và $ED = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$.

Do MN là đường trung bình của hình thang BEDC nên MN // ED // BC.

ΔBED có BM = ME, MI // ED nên MI là đường trung bình, $MI = \frac{ED}{2} = \frac{a}{4}$.

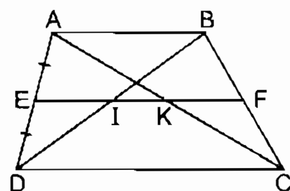
ΔCED có CN = ND, NK // ED nên NK là đường trung bình, $NK = \frac{ED}{2} = \frac{a}{4}$.

ΔEBC có EM = MB, MK // BC nên MK là đường trung bình, $MK = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$.

Suy ra $IK = MK - MI = \frac{a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{a}{4}$.

Vậy MI = IK = KN.

41. (h.54). Xét hình thang ABCD có AB // CD, AE = ED, EF // AB // CD nên BF = FC. Vì ΔADC có AE = ED, EK // DC nên AK = KC.

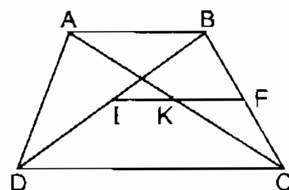


Hình 54

Tương tự, ΔABD có AE = ED, EI // AB nên BI = ID.

Như vậy, EF đi qua trung điểm của BC, của AC và của BD.

42. (h.55). Xét hình thang ABCD có AB // CD, AB < CD, I và K là trung điểm của BD và AC.



Hình 55

Gọi F là trung điểm của BC. Vì ΔBDC có BI = ID, BF = FC nên IF là đường trung bình. Do đó IF // DC và $IF = \frac{DC}{2}$. Tương tự, ΔABC có BF = FC, AK = KC nên FK là đường trung bình. Do đó FK // AB // CD và $FK = \frac{AB}{2}$.

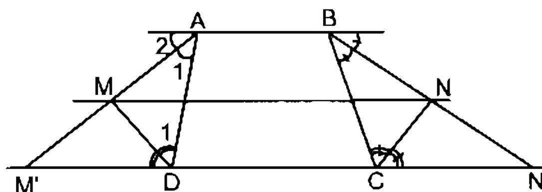
Qua F ta có IF // CD và FK // CD nên I, K, F thẳng hàng. Do đó

$$IK = IF - FK = \frac{DC}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{DC - AB}{2}.$$

43. (h.56).

a) Gọi M', N' là giao điểm của AM, BN với DC.

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{M}' \Rightarrow \Delta ADM'$ cân.



Hình 56

$\Delta ADM'$ cân có DM là đường phân giác nên AM = MM'. Tương tự BN = NN'.

Vì MN là đường trung bình của hình thang ABN'M' nên MN // M'N', do đó MN // CD.

b) $MN = \dfrac{AB + M'N'}{2} = \dfrac{AB + M'D + DC + CN'}{2} = \dfrac{AB + AD + DC + CB}{2}$

$= \dfrac{a + d + c + b}{2}.$

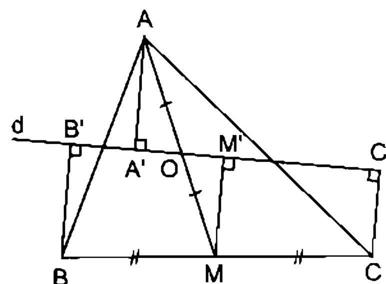
44. (h.57). Kẻ $MM' \perp d$.

Hình thang BB'C'C có BM = MC, MM' // BB' // CC' nên MM' là đường trung bình, do đó

$$MM' = \frac{BB' + CC'}{2}. \qquad (1)$$

$\Delta AOA' = \Delta MOM'$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow$ MM' = AA'. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AA' = \dfrac{BB' + CC'}{2}$.



Hình 57

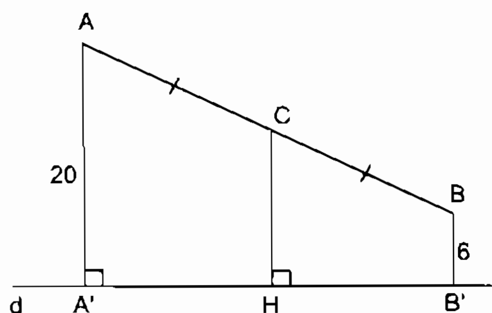
Bài tập bổ sung

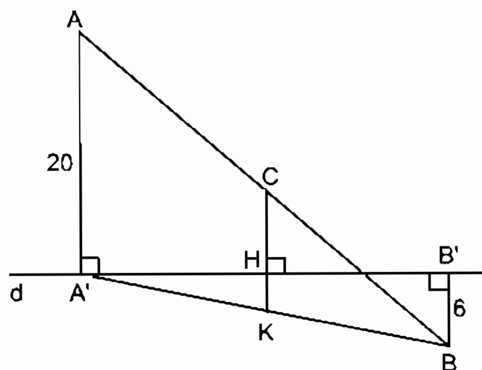
4.1. Chọn (C).

4.2. Xét hai trường hợp :

– Trường hợp A và B nằm cùng phía đối với đường thẳng d (h.bs.6a).

Ta tính được $CH = \dfrac{20 + 6}{2} = 13$ (cm).



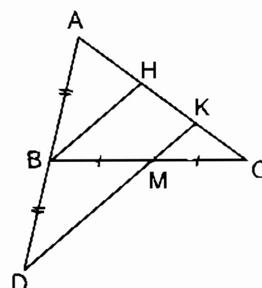


Hình bs.6

– Trường hợp A và B nằm khác phía đối với đường thẳng d (h.bs.6b).

Ta tính được CH = CK – HK

= 10 – 3 = 7 (cm).



Hình bs.7

4.3. (h.bs.7) Gọi H là trung điểm của AK. Hãy chứng minh BH // DK và HK = KC.

§5. Dựng hình bằng thước và compa. Dựng hình thang

45. (h.58). *Cách dựng :*

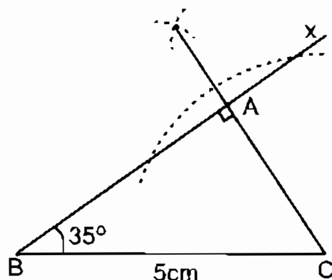
– Dựng đoạn thẳng BC bằng 5cm.

– Dựng góc CBx bằng 35^o.

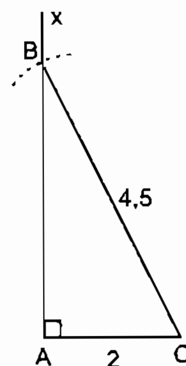
– Dựng CA ⊥ Bx.

Chứng minh :

ΔABC có $\widehat{A} = 90^o$, BC = 5cm, $\widehat{B} = 35^o$, thoả mãn đề bài.



Hình 58



Hình 59

46. (h.59). *Cách dựng :*

– Dựng đoạn thẳng AC bằng 2cm.

– Dựng góc CAx bằng 90^o.

– Dựng cung tâm C có bán kính 4,5cm, cắt tia Ax ở B.

– Dựng đoạn thẳng BC.

Chứng minh : Học sinh tự giải.

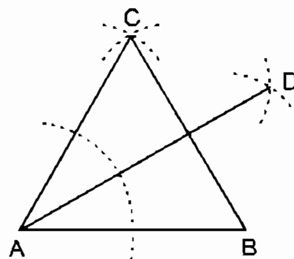
47. (h.60). *Cách dựng :*

– Dựng ΔABC đều.

– Dựng tia phân giác AD của góc A.

Ta có : $\widehat{BAD} = 30^o$.

Chứng minh : Học sinh tự giải.



Hình 60

48. (h.61). *Cách dựng :*

– Dựng đoạn thẳng CD bằng 3cm.

– Dựng góc CDx bằng 70^o.

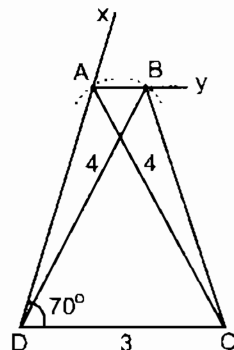
– Dựng cung tâm C có bán kính 4cm, cắt tia Dx ở A.

– Dựng tia Ay // DC (Ay và C thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AD).

– Dựng cung tâm D có bán kính 4cm, cắt tia Ay ở B.

– Dựng đoạn thẳng BC.

Chứng minh : Học sinh tự giải.



Hình 61

49. (h.62). *Cách dựng :*

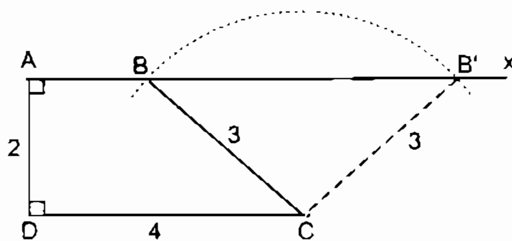
– Dựng ΔADC, biết hai cạnh và góc xen giữa : AD = 2cm, CD = 4cm, $\widehat{D} = 90^o$.

– Dựng tia Ax ⊥ AD (Ax và C thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AD).

– Dựng cung tâm C có bán kính 3cm, cắt tia Ax ở B.

– Kẻ đoạn thẳng BC.

Chứng minh : Học sinh tự giải.



Hình 62

Chú ý. Có hai hình thang ABCD, AB'CD thoả mãn bài toán.

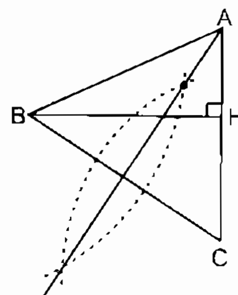
50. (h.63). *Cách dựng :*

– Dựng ΔBHC vuông tại H biết cạnh huyền $BC = 3cm$, cạnh góc vuông $BH = 2{,}5cm$ (học sinh tự nêu cách dựng).

– Dựng đường trung trực của BC, cắt CH tại A.

– Kẻ đoạn thẳng AB.

Chứng minh : Học sinh tự giải.



Hình 63

51. (h.64). *Cách dựng :*

– Dựng đoạn thẳng BC bằng 4cm.

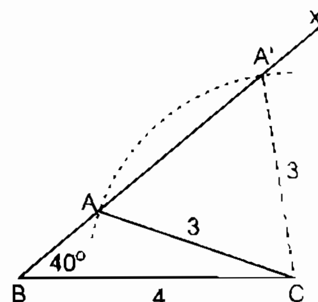
– Dựng góc CBx bằng 40°.

– Dựng cung tâm C có bán kính 3cm, cắt tia Bx tại A.

– Kẻ đoạn thẳng AC.

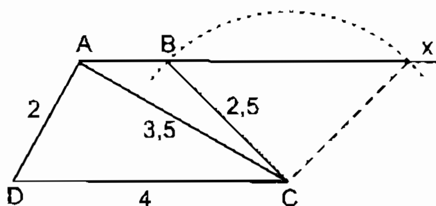
Chứng minh : Học sinh tự giải.

Chú ý. Có hai tam giác ABC, A'BC thoả mãn bài toán.

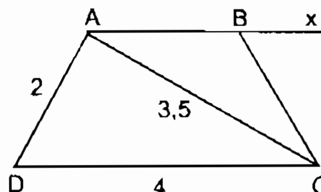


Hình 64

52. (h.65). Dựng ΔACD, sau đó dựng điểm B.



Hình 65



Hình 66

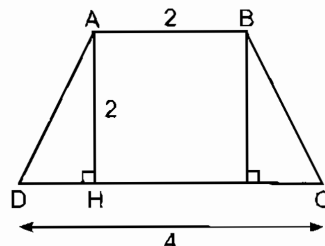
53. (h.66). Dựng ΔACD, sau đó dựng điểm B (bằng cách dựng $\widehat{DCB} = \widehat{D}$ hoặc $DB = 3{,}5cm$).

54. (h.67).

Ta tính được

$$DH = \frac{CD - AB}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1\,(cm).$$

Dựng ΔADH, sau đó dựng các điểm C và B.



Hình 67

55. (h.68). *Phân tích*(*)

Giả sử đã dựng được hình thang ABCD thoả mãn yêu cầu của bài toán. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC, cắt CD ở E. Hình thang ABCE có hai cạnh bên AE, BC song song nên EC = AB = 2cm. Do đó DE = 2cm.

Tam giác ADE dựng được vì biết một cạnh và hai góc kề.

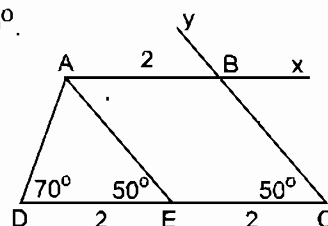
Từ đó dựng được các điểm C và B.

Cách dựng :

– Dựng ΔADE, biết DE = 2cm, $\widehat{D} = 70^o$, $\widehat{E} = 50^o$.

– Trên tia DE dựng điểm C sao cho DC = 4cm.

– Dựng các tia Ax // EC, Cy // EA, chúng cắt nhau ở B.



Hình 68

Chứng minh :

ABCD là hình thang vì AB // CD.

Ta có $\widehat{D} = 70^o$, DC = 4cm, $\widehat{C} = \widehat{AED}$ (đồng vị, BC // AE) nên $\widehat{C} = 50^o$.

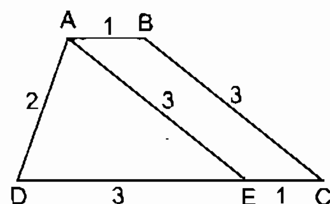
Hình thang ABCE có hai cạnh bên AE, BC song song nên

$$AB = EC = 4 - 2 = 2(cm).$$

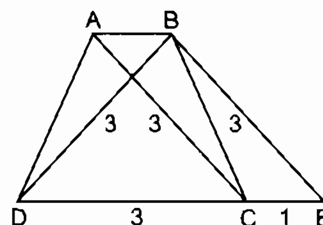
56. (h.69).

Gợi ý. Kẻ AE // BC.

Cách dựng : Dựng ΔADE, sau đó dựng các điểm C và B.



Hình 69



Hình 70

57. (h.70).

Gợi ý. Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt DC ở E.

Cách dựng : Dựng ΔBDE cân, biết ba cạnh. Sau đó, dựng các điểm C và A.

(*) Không yêu cầu học sinh trình bày bước phân tích.

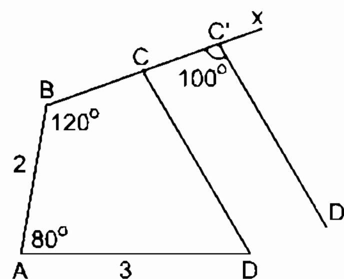
58. (h.71). *Cách dựng :*

– Dựng ΔABD có $\widehat{A} = 80^o$, AB = 2cm, AD = 3cm.

– Dựng góc ABx bằng 120^o (Bx và D thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB).

– Lấy điểm C' bất kì trên tia Bx.

– Dựng góc BC'D' bằng 100^o (C'D' và D thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ BC').



Hình 71

– Qua D dựng đường thẳng song song với D'C', cắt Bx ở C.

Chứng minh :

$$CD \parallel C'D' \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{BC'D'} = 100^o.$$

Tứ giác ABCD có AB = 2cm, AD = 3cm, $\widehat{A} = 80^o$, $\widehat{B} = 120^o$, $\widehat{C} = 100^o$, thoả mãn bài toán.

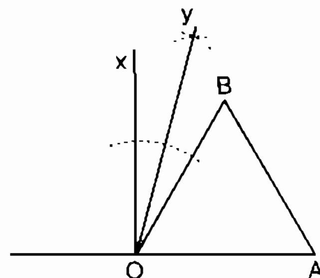
59. (h.72). *Cách dựng :*

– Dựng ΔAOB đều.

– Dựng tia $Ox \perp OA$ (Ox và B thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ OA).

– Dựng Oy là tia phân giác của góc BOx. Ta có $\widehat{AOy} = 75^o$.

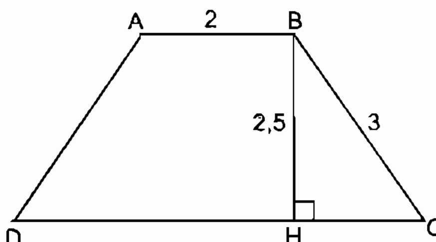
Chứng minh : Học sinh tự giải.



Hình 72

Bài tập bổ sung

5.1. (h.bs.8) Dựng tam giác BHC vuông tại H có BH = 2,5cm và BC = 3cm. Sau đó dựng A và D.



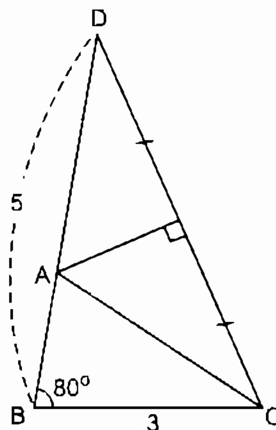
Hình bs.8

5.2. (h.bs.9)

– Dựng ΔDBC có $\widehat{B} = 80^\circ$, $BD = 5cm$, $BC = 3cm$.

– Dựng đường trung trực của CD, cắt BD tại A.

– Kẻ đoạn thẳng AC.



Hình bs.9

§6. Đối xứng trục

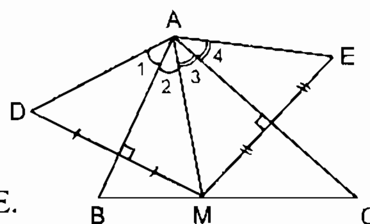
60. (h.73).

a) D đối xứng với M qua AB

$\Rightarrow$ AB là đường trung trực của MD

$\Rightarrow AD = AM$.

Chứng minh tương tự, $AE = AM$. Vậy $AD = AE$.



Hình 73

b) $AD = AM \Rightarrow \Delta ADM$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.

Chứng minh tương tự, $\widehat{A}_3 = \widehat{A}_4$.

Do đó $\quad \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 + \widehat{A}_4 = 2(\widehat{A}_2 + \widehat{A}_3) = 2 \,.\, 70^\circ = 140^\circ$.

Suy ra $\widehat{DAE} = 140^\circ$.

61. (h.74).

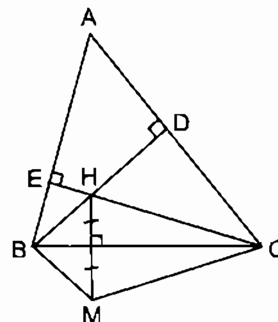
a) M đối xứng với H qua BC

$\Rightarrow$ BC là đường trung trực của HM

$\Rightarrow BH = BM$.

Chứng minh tương tự, $CH = CM$.

$$\Delta BHC = \Delta BMC \text{ (c.c.c)}.$$



Hình 74

b) Gọi D là giao điểm của BH và AC, E là giao điểm của CH và AB.

Xét tứ giác ADHE :

$$\widehat{DHE} = 360^\circ - \widehat{D} - \widehat{E} - \widehat{A} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Ta lại có $\widehat{DHE} = \widehat{BHC}$ (đối đỉnh),

$\widehat{BHC} = \widehat{BMC}$ ($\Delta BHC = \Delta BMC$)

nên $\widehat{BMC} = \widehat{DHE} = 120^o$.

62. (h.75). B đối xứng với H qua AD

$\Rightarrow$ AD là đường trung trực của BH

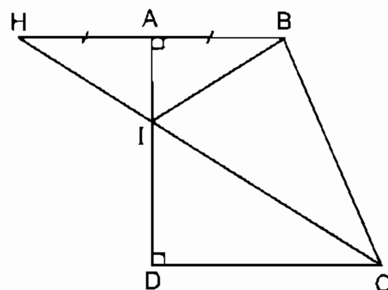
$\Rightarrow$ IB = IH

$\Rightarrow$ ΔBIH cân tại I

$\Rightarrow$ $\widehat{AIB} = \widehat{AIH}$.

Ta lại có $\widehat{AIH} = \widehat{DIC}$ (đối đỉnh).

Suy ra $\widehat{AIB} = \widehat{DIC}$.



Hình 75

Chú ý. Cách khác để chứng minh $\widehat{AIB} = \widehat{AIH}$:

B đối xứng với H qua AD, I và A đối xứng với chính nó qua AD nên góc AIB đối xứng với góc AIH qua AD. Vậy $\widehat{AIB} = \widehat{AIH}$.

63. (h.76). A' đối xứng với A qua xy

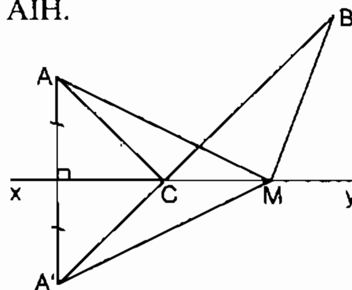
$\Rightarrow$ xy là đường trung trực của AA'

$\Rightarrow$ AC = A'C, AM = A'M.

Ta có :

AC + CB = A'C + CB = A'B. (1)

AM + MB = A'M + MB, (2)



Hình 76

A'B < A'M + MB (quan hệ giữa ba cạnh trong $\Delta A'MB$). (3)

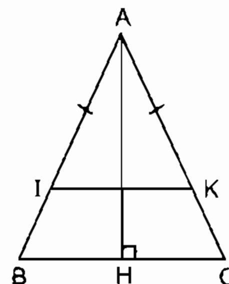
Từ (1), (2), (3) suy ra : AC + CB < AM + MB.

64. (h.77).

Vì ΔABC cân tại A, AH là đường cao nên AH là tia phân giác của góc A.

Do ΔAIK cân tại A, AH là tia phân giác của góc A nên AH là đường trung trực của IK.

Vậy I đối xứng với K qua AH.



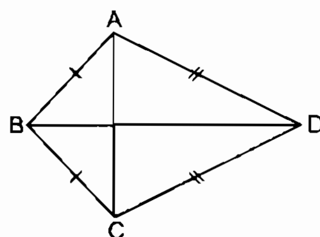
Hình 77

65. (h.78).

AB = BC ⇒ B thuộc đường trung trực của AC.

CD = DA ⇒ D thuộc đường trung trực của AC.

Vậy BD là đường trung trực của AC, do đó A đối xứng với C qua BD.



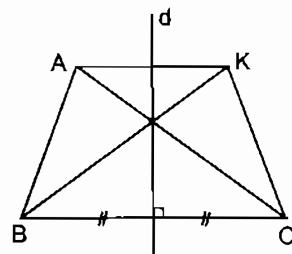
Hình 78

66. (h.79).

a) Đoạn thẳng đối xứng với đoạn thẳng AB qua d là KC.

Đoạn thẳng đối xứng với đoạn thẳng AC qua d là KB. Học sinh tự giải thích.

b) Vì d là đường trung trực của AK và của BC nên AK ⊥ d, BC ⊥ d. Vậy AK // BC, do đó AKCB là hình thang.

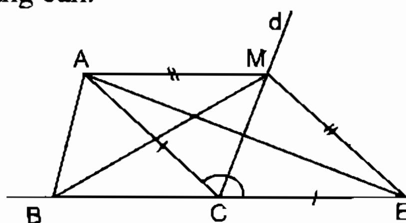


Hình 79

Theo câu a), AC đối xứng với KB qua d, do đó AC = KB. Hình thang AKCB có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.

67. (h.80). Gọi d là đường phân giác của góc ngoài tại C. Trên tia đối của tia CB lấy E sao cho CE = CA.

Vì ΔACE cân tại C, d là đường phân giác của góc ACE nên d là đường trung trực của AE. Do đó MA = ME.



Hình 80

Ta có : AC + CB = EC + CB = BE, (1)

AM + MB = EM + MB, (2)

ΔBME có BE < EM + MB. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra AC + CB < AM + MB.

68. Hình nét đậm ở hình 4 có trục đối xứng.

69. Học sinh tự giải.

70. Câu a) đúng, câu b) sai.

71. (h.81).

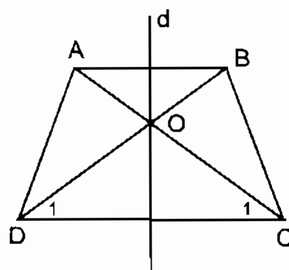
Cách 1. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC, BD của hình thang cân ABCD.

$\Delta ADC = \Delta BCD$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$

$\Rightarrow \Delta COD$ cân tại O $\Rightarrow OC = OD$

$\Rightarrow$ O thuộc đường trung trực của CD

$\Rightarrow$ O thuộc trục đối xứng của hình thang cân.



Hình 81

Cách 2. Hai đường chéo của hình thang cân cắt nhau tại một điểm duy nhất, điểm đó phải nằm trên trục đối xứng của hình.

72. (h.82). *Cách dựng :*

– Dựng D đối xứng với A qua Ox.

– Dựng E đối xứng với A qua Oy.

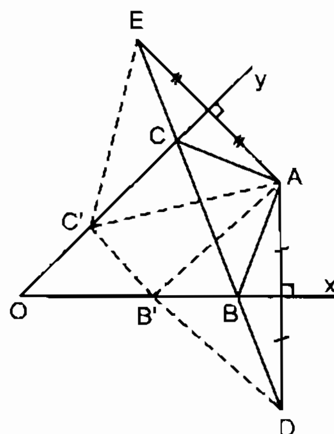
– Ox, Oy cắt đoạn thẳng DE ở B, C.

Tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

Chứng minh :

Gọi B' là điểm bất kì trên Ox, C' là điểm bất kì trên Oy.

Ox là đường trung trực của AD $\Rightarrow$ AB = BD, AB' = B'D. Tương tự, Oy là đường trung trực của AE $\Rightarrow$ AC = CE, AC' = C'E.



Hình 82

Chu vi ΔABC bằng :

$$AC + CB + BA = EC + CB + BD = ED. \quad (1)$$

Chu vi $\Delta AB'C'$ bằng :

$$AC' + C'B' + B'A = EC' + C'B' + B'D. \quad (2)$$

Do $ED \leq EC' + C'B' + B'D$ nên chu vi $\Delta ABC \leq$ chu vi $\Delta AB'C'$.

(Dấu "=" xảy ra nếu $C' \equiv C$ và $B' \equiv B$).

Chú ý. Do góc xOy nhọn nên các tia Ox, Oy luôn cắt đoạn thẳng DE. Do đó luôn tồn tại các điểm B, C.

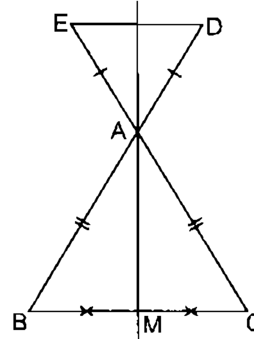
Bài tập bổ sung

6.1. Nối 1) với C). Nối 2) với A).

6.2. (h.bs.10) Tam giác ABC cân tại A có AM là đường trung tuyến nên cũng là đường phân giác.

Đường thẳng MA chứa tia phân giác của góc ở đỉnh của tam giác cân ADE nên là đường trung trực của DE.

Vậy D đối xứng với E qua AM.



Hình bs.10

§7. Hình bình hành

73. Tứ giác ABCD là hình bình hành vì hai cạnh đối AD, BC song song và bằng nhau.

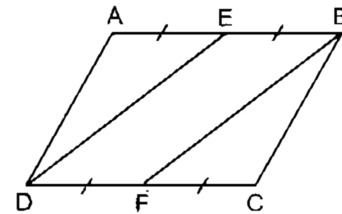
Tứ giác EFGH là hình bình hành vì các cạnh đối bằng nhau (hoặc vì hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường).

74. (h.83). *Cách 1*. ΔADE và ΔCBF có :

$\widehat{A} = \widehat{C}$ (góc đối hình bình hành),

AD = BC (cạnh đối hình bình hành),

AE = CF (bằng nửa cạnh đối AB, CD của hình bình hành).



Hình 83

Do đó $\Delta ADE = \Delta CBF$ (c.g.c), suy ra DE = BF.

Cách 2. Tứ giác BEDF có :

BE // DF (vì AB // CD),

BE = DF (bằng nửa cạnh đối AB, CD của hình bình hành),

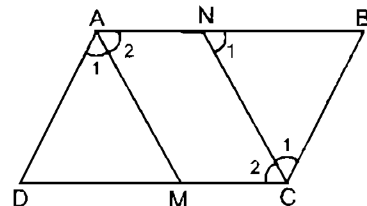
nên BEDF là hình bình hành. Suy ra DE = BF (cạnh đối).

75. (h.84). Vì $\widehat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{A}$, $\widehat{C}_2 = \frac{1}{2}\widehat{C}$, mà $\widehat{A} = \widehat{C}$ (góc đối hình bình hành)

nên $\widehat{A}_2 = \widehat{C}_2$. Do

$\widehat{N}_1 = \widehat{C}_2$ (so le trong, AB // CD).

Suy ra $\widehat{A}_2 = \widehat{N}_1$.



Hình 84

Hai góc $\widehat{A}_2$, $\widehat{N}_1$ đồng vị nên AM // CN.

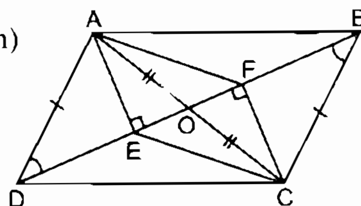
Tứ giác AMCN có AN // CM, AM // CN nên là hình bình hành.

76. (h.85).

Cách 1. $\Delta AED = \Delta CFB$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow AE = CF$.

Tứ giác AECF có AE // CF, AE = CF nên là hình bình hành.



Hình 85

Cách 2. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

$\Delta AOE = \Delta COF$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow OE = OF$.

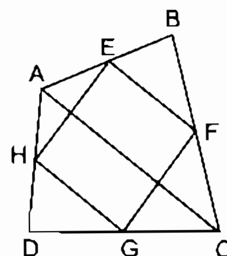
Tứ giác AECF có OE = OF, OA = OC nên là hình bình hành.

77. (h.86). ΔABC có AE = EB, BF = FC nên EF là đường trung bình. Do đó

$$EF // AC,\ EF = \frac{AC}{2}. \qquad (1)$$

ΔADC có AH = HD, CG = GD nên HG là đường trung bình. Do đó

$$HG // AC,\ HG = \frac{AC}{2}. \qquad (2)$$



Hình 86

Từ (1) và (2) suy ra EF // HG, EF = HG. Tứ giác EFGH có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên là hình bình hành.

78. (h.87). Vì $AK = \frac{AB}{2}$, $IC = \frac{CD}{2}$ mà AB = CD nên AK = IC.

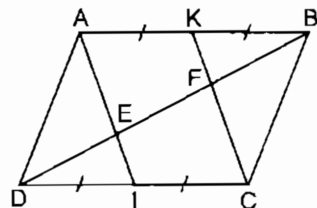
Tứ giác AKCI có AK // IC, AK = IC nên là hình bình hành. Do đó AI // CK.

ΔDCF có DI = IC, IE // CF nên

$$DE = EF. \qquad (1)$$

ΔABE có AK = KB, KF // AE nên

$$EF = FB. \qquad (2)$$



Hình 87

Từ (1) và (2) suy ra DE = EF = FB.

79. a) $\widehat{A} = \widehat{C} = 110^o$, $\widehat{B} = \widehat{D} = 70^o$.

b) $\widehat{A} = \widehat{C} = 100^o$, $\widehat{B} = \widehat{D} = 80^o$.

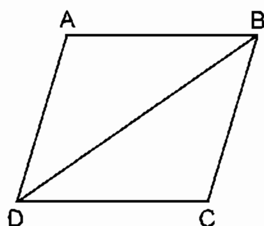
80. Tứ giác ABCD là hình bình hành vì hai cạnh đối AD, BC song song và bằng nhau.

Tứ giác IKMN là hình bình hành vì KM // IN, IK // MN (hoặc vì $\hat{I} = \widehat{M}$, $\widehat{K} = \widehat{N}$).

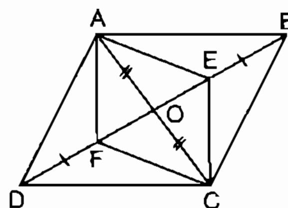
81. (h.88). Ta có $AB + AD = \frac{10}{2} = 5(cm)$,

$$AB + AD + BD = 9(cm).$$

Suy ra BD = 9 – 5 = 4(cm).



Hình 88



Hình 89

82. (h.89). Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có OA = OC, OE = OF nên AECF là hình bình hành. Suy ra AE // CF.

83. (h.90).

a) Tứ giác AECF có AE // CF, AE = CF nên là hình bình hành. Suy ra AF // CE.

Chứng minh tương tự, BF // DE.

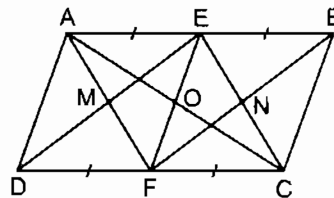
Tứ giác EMFN có EM // FN, EN // FM nên là hình bình hành.

b) Gọi O là giao điểm của AC và EF. Ta sẽ chứng minh MN cũng đi qua O.

AECF là hình bình hành, O là trung điểm của AC nên O là trung điểm của EF.

EMFN là hình bình hành nên đường chéo MN đi qua trung điểm O của EF.

Vậy AC, EF, MN đồng quy tại O.



Hình 90

84. (h.91).

a) Chứng minh rằng EG = HF, EH = GF.

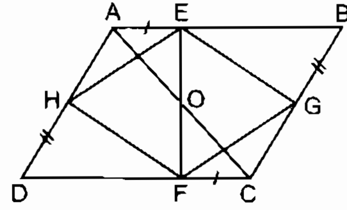
b) Gọi O là giao điểm của AC và EF. Tứ giác AECF có AE = CF, AE // CF nên là hình bình hành.

Suy ra O là trung điểm của AC, EF.

ABCD là hình bình hành, O là trung điểm của AC nên O là trung điểm của BD.

EGFH là hình bình hành, O là trung điểm của EF nên O là trung điểm của GH.

Vậy AC, EF, BD, GH đồng quy tại O.



Hình 91

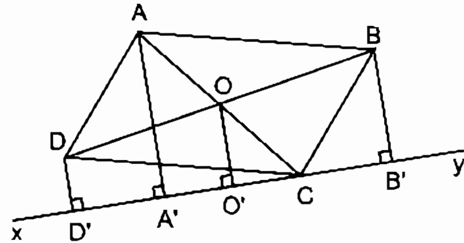
85. (h.92). Gọi O là giao điểm của AC và BD. Kẻ OO' ⊥ xy.

Hình thang DBB'D' có DO = OB, OO' // BB' // DD' nên OO' là đường trung bình và

$$OO' = \frac{BB' + DD'}{2}. \qquad (1)$$

ΔAA'C có AO = OC, OO' // AA' nên OO' là đường trung bình và

$$OO' = \frac{AA'}{2}. \qquad (2)$$



Hình 92

Từ (1) và (2) suy ra AA' = BB' + DD'.

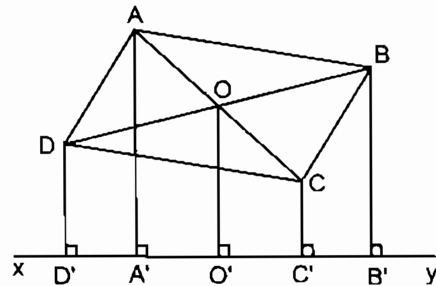
86. (h.93). Gọi O là giao điểm của AC và BD. Kẻ OO' ⊥ xy.

Hình thang ACC'A' có AO = OC, OO' // AA' // CC' nên OO' là đường trung bình và

$$OO' = \frac{AA' + CC'}{2}. \qquad (1)$$

Hình thang BDD'B' có BO = OD, OO' // BB' // DD' nên OO' là đường trung bình và

$$OO' = \frac{BB' + DD'}{2}. \qquad (2)$$



Hình 93

Từ (1) và (2) suy ra AA' + CC' = BB' + DD'.

87. (h.94).

a) $\widehat{EAF} = 360^\circ - \widehat{BAE} - \widehat{DAF} - \alpha$

$= 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - \alpha$

$= 240^\circ - \alpha.$

b) Ta có $\widehat{ADC} = 180^{o} - \alpha$,

$\widehat{CDF} = \widehat{ADC} + \widehat{ADF} = 180^{o} - \alpha + 60^{o}$

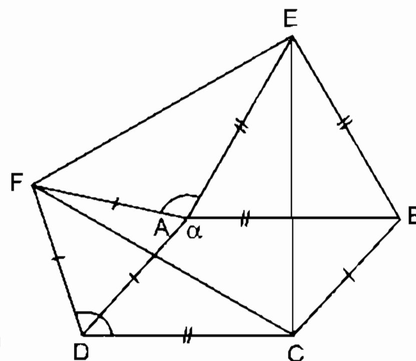
$= 240^{o} - \alpha$.

Suy ra $\widehat{CDF} = \widehat{EAF}$.

$\Delta CDF = \Delta EAF$ (c.g.c) $\Rightarrow CF = EF$.

Chứng minh tương tự, $\Delta EBC = \Delta EAF$ (c.g.c)

$\Rightarrow EC = EF$.



Hình 94

Tam giác CEF có CF = EF = EC nên là tam giác đều.

88. (h.95).

a) $\widehat{BAC} = \widehat{ADI}$ (cùng bù với $\widehat{DAE}$),

$\Delta BAC = \Delta ADI$ (c.g.c) $\Rightarrow BC = AI$.

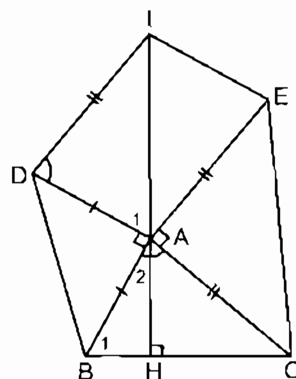
b) Gọi H là giao điểm của IA và BC.

$\Delta BAC = \Delta ADI \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$.

Ta lại có $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 90^{o}$

nên $\widehat{B}_1 + \widehat{A}_2 = 90^{o}$.

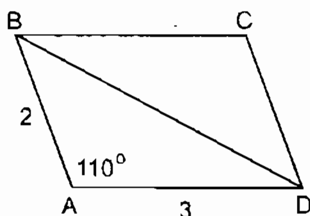
Do đó $AH \perp BC$, tức là $IA \perp BC$.



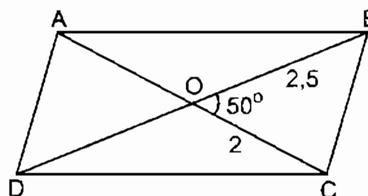
Hình 95

89. a) (h.96). Dựng ΔABD có $\widehat{A} = 110^{o}$, AB = 2cm, AD = 3cm.

Sau đó dựng điểm C.



Hình 96



Hình 97

b) (h.97). Dựng ΔBOC có $\widehat{O} = 50^{o}$, OC = 2cm, OB = 2,5cm.

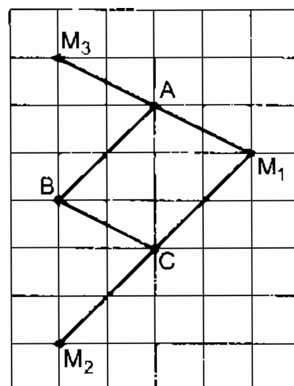
Sau đó dựng các điểm A và D.

90. Điểm thứ tư M là một trong ba điểm M_1, M_2, M_3 như trên hình 98.

– Với AC là đường chéo, có hình bình hành $ABCM_1$.

– Với BC là đường chéo, có hình bình hành ABM_2C.

– Với AB là đường chéo, có hình bình hành $ACBM_3$.



Hình 98

91. (h.99). *Phân tích :*

Giả sử đã dựng được đường thẳng EF // BC và BE = AF.

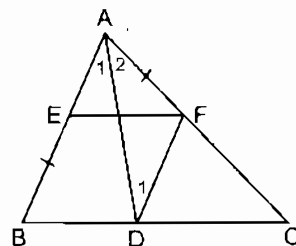
Kẻ FD // AB. Khi đó BEFD là hình bình hành

$\Rightarrow$ BE = DF. Ta lại có BE = AF nên DF = AF.

Suy ra ΔAFD cân, do đó $\widehat{A}_2 = \widehat{D}_1$.

Ta lại có $\widehat{A}_1 = \widehat{D}_1$ (so le trong, AB // FD).

Suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.



Hình 99

Cách dựng :

– Dựng đường phân giác AD.

– Qua D kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AC ở F.

– Qua F kẻ đường thẳng song song với BC, cắt AB ở E.

Chứng minh : Học sinh tự giải.

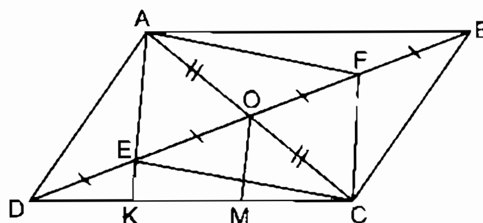
Bài tập bổ sung

7.1. Chọn (D).

7.2. (h.bs.11)

a) Tứ giác AECF có OA = OC, OE = OF nên là hình bình hành.

Suy ra AE // CF.



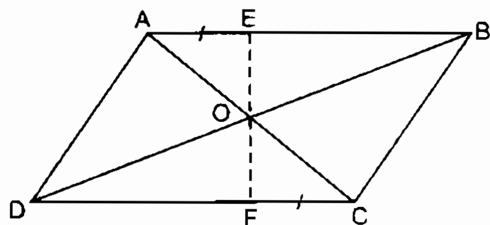
Hình bs.11

b) Gọi M là trung điểm của KC.

Tam giác ACK có OM là đường trung bình nên OM // AK.

Tam giác ODM có DE = EO

và EK // OM nên $DK = KM = \frac{1}{2}KC$.



Hình bs.12

7.3. (h.bs.12) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Hãy chứng minh AECF là hình bình hành để suy ra ba điểm E, O, F thẳng hàng.

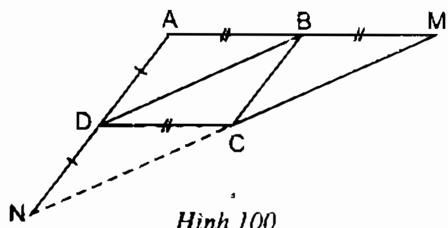
§8. Đối xứng tâm

92. (h.100). Tứ giác BMCD có BM // CD, BM = CD nên là hình bình hành. Suy ra CM // BD, CM = BD. (1)

Chứng minh tương tự,

CN // BD, CN = BD. (2)

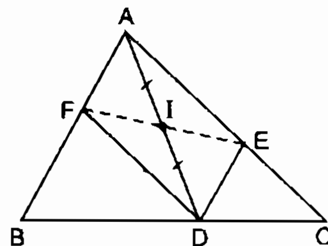
Từ (1) và (2) suy ra M, C, N thẳng hàng và CM = CN. Do đó M đối xứng với N qua C.



Hình 100

93. (h.101). Tứ giác AEDF có AE // DF, AF // DE nên là hình bình hành.

Hình bình hành AEDF có I là trung điểm của AD nên I cũng là trung điểm của EF. Do đó E đối xứng với F qua I.



Hình 101

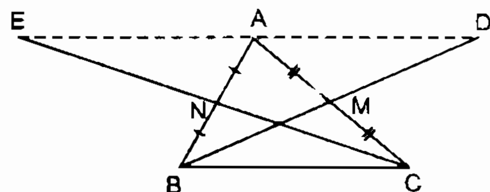
94. (h.102). Tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường : MA = MC, MB = MD nên là hình bình hành.

Suy ra AD // BC, AD = BC. (1)

Chứng minh tương tự,

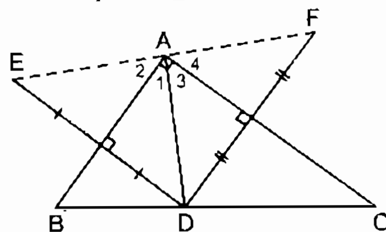
AE // BC, AE = BC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra D, A, E thẳng hàng và AD = AE. Do đó D đối xứng với E qua A.



Hình 102

95. (h.103). Vì ΔADE có AB là đường trung trực của DE nên là tam giác cân, và AB cũng là đường phân giác, do đó : AE = AD, $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.



Hình 103

Chứng minh tương tự, AF = AD, $\widehat{A}_3 = \widehat{A}_4$.

Suy ra : AE = AF (cùng bằng AD),

$$\widehat{DAE} + \widehat{DAF} = 2(\widehat{A}_1 + \widehat{A}_3)$$

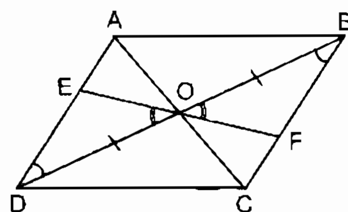
$$= 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ.$$

Do đó A là trung điểm của EF, tức là E và F đối xứng với nhau qua A.

96. (h.104). Vì $\Delta ODE = \Delta OBF$ (g.c.g)

nên OE = OF.

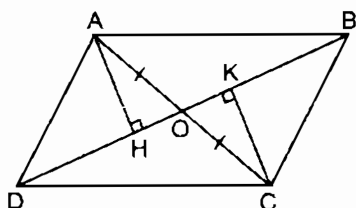
Do O là trung điểm của EF nên E và F đối xứng với nhau qua O.



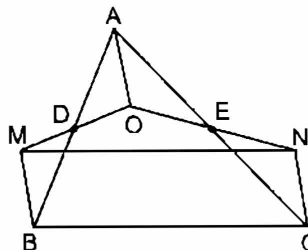
Hình 104

97. (h.105). Chứng minh rằng

$\Delta AOH = \Delta COK$ (cạnh huyền - góc nhọn).



Hình 105



Hình 106

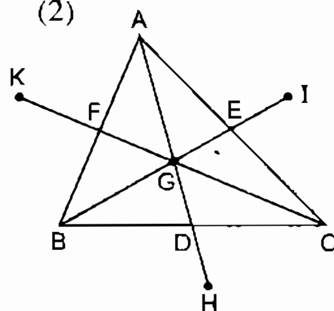
98. (h.106). Tứ giác AOBM có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành. Suy ra

BM // OA, BM = OA. (1)

Chứng minh tương tự, NC // OA, NC = OA. (2)

Từ (1) và (2) suy ra BM // NC, BM = NC. Vậy MNCB là hình bình hành.

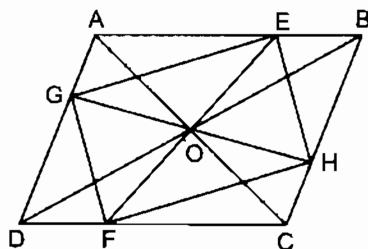
99. (h.107). Ta có GH = GA (cùng bằng 2GD) nên điểm đối xứng với A qua G là H. Tương tự, ta có điểm đối xứng với B qua G là I và điểm đối xứng với C qua G là K.



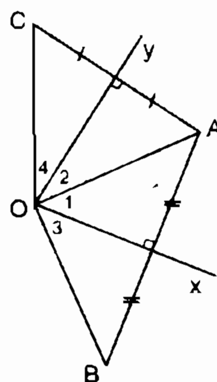
Hình 107

100. (h.108). *HD :*

Chứng minh rằng OE = OF, OG = OH.



Hình 108



Hình 109

101. (h.109).

a) *HD* : Chứng minh rằng OB và OC cùng bằng OA.

b) Ta đã có OB = OC. Do đó B đối xứng với C qua O nếu có thêm điều kiện B, O, C thẳng hàng. Ta có $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_3$, $\widehat{O}_2 = \widehat{O}_4$ nên :

B, O, C thẳng hàng $\Leftrightarrow 2\widehat{O}_1 + 2\widehat{O}_2 = 180^o$

$\Leftrightarrow \widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 = 90^o$

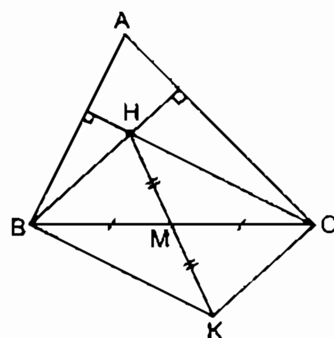
$\Leftrightarrow \widehat{xOy} = 90^o$.

102. (h.110).

Tứ giác BHCK có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành. Suy ra KB // CH, KC // BH.

Ta có KB // CH, CH $\perp$ AB nên KB $\perp$ AB. Do đó $\widehat{ABK} = 90^o$.

Chứng minh tương tự, $\widehat{ACK} = 90^o$.



Hình 110

103. Hình có tâm đối xứng :

a) Đoạn thẳng AB (tâm đối xứng là trung điểm của AB).

c) Đường tròn tâm O (tâm đối xứng là tâm O của đường tròn).

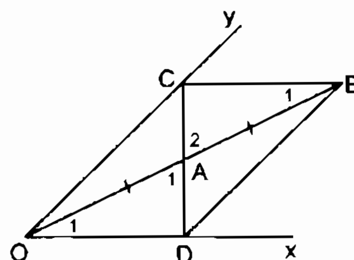
104. (h.111).

a) ΔAOD và ΔABC có :

$AO = AB$,

$\widehat{O}_1 = \widehat{B}_1$ (so le trong, BC // OD),

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (đối đỉnh).



Do đó $\Delta AOD = \Delta ABC$ (g.c.g).

Hình 111

Suy ra AD = AC. Do A là trung điểm của CD nên C và D đối xứng với nhau qua A.

b) *Cách 1*. Học sinh tự giải theo câu a).

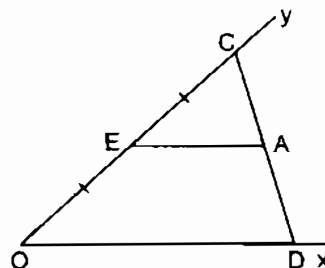
Cách 2. *Cách dựng* (h.112).

– Qua A dựng đường thẳng song song với Ox, cắt Oy ở E.

– Dựng điểm C đối xứng với O qua E.

– CA cắt Ox ở D.

Chứng minh. Học sinh tự giải.



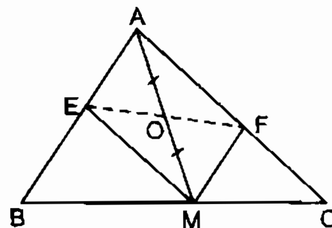
Hình 112

105. (h.113). *Cách dựng* :

– Qua M dựng đường thẳng song song với AC, cắt AB ở E.

– Qua M dựng đường thẳng song song với AB, cắt AC ở F.

Chứng minh. Học sinh tự giải.



Hình 113

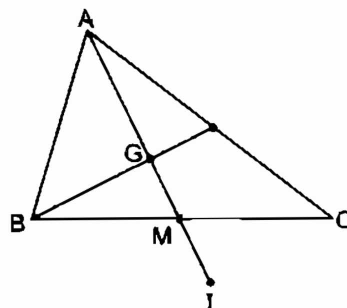
Bài tập bổ sung

8.1. a) Đúng ; b) Đúng ; c) Sai ; d) Đúng.

8.2. (h.bs.13)

$$MG = \frac{1}{2}GA = \frac{1}{2}GI \text{ nên}$$

MG = MI. Điểm M là trung điểm của GI nên I đối xứng với G qua M.



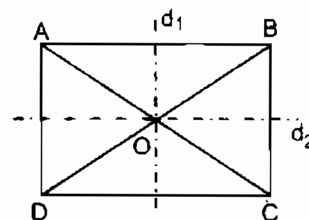
Hình bs.13

§9. Hình chữ nhật

106. Theo định lí Py-ta-go : $d^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 5^2 = 34$ hay

$$d = \sqrt{34} \approx 5,8(\text{cm}).$$

107. (h.114).



Hình 114

a) Ta đã biết, hình bình hành có tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo. Hình chữ nhật cũng là một hình bình hành nên cũng có tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo.

b) Ta đã biết, hình thang cân có trục đối xứng là đường thẳng đi qua trung điểm của hai đáy. Hình chữ nhật ABCD là một hình thang cân có đáy AB, CD nên đường thẳng d_1 đi qua trung điểm của AB, CD là trục đối xứng. Hình chữ nhật ABCD cũng là một hình thang cân có đáy AD, BC nên đường thẳng d_2 đi qua trung điểm của AD, BC cũng là trục đối xứng.

108. Cạnh huyền của tam giác vuông bằng :

$$\sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} \approx 11,2(\text{cm}).$$

Đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng :

$$11,2 : 2 = 5,6(\text{cm}).$$

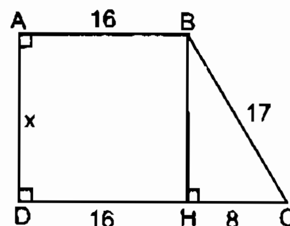
109. (h.115). Kẻ $BH \perp CD$. Tứ giác ABHD có ba góc vuông nên là hình chữ nhật. Do đó : $DH = AB = 16(\text{cm})$. Suy ra :

$HC = DC - DH = 24 - 16 = 8(\text{cm})$.

Xét ΔBHC vuông. Theo định lí Py-ta-go :

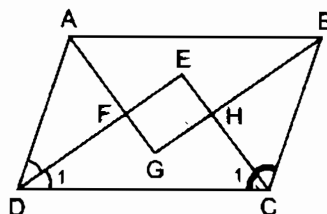
$$BH = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{17^2 - 8^2}$$
$$= \sqrt{225} = 15(\text{cm}).$$

Vậy $x = 15(\text{cm})$.



Hình 115

110. Xét tứ giác EFGH tạo bởi các tia phân giác của các góc của hình bình hành ABCD (h.116).



Hình 116

Ta có $\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ$ nên $\hat{C}_1 + \hat{D}_1 = 90^\circ$.

Do đó $\hat{E} = 90^\circ$.

Chứng minh tương tự, $\hat{F} = 90^\circ$, $\hat{G} = 90^\circ$.

Tứ giác EFGH có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

111. (h.117).

ΔABC có AE = EB, BF = FC nên EF // AC.

Chứng minh tương tự, HG // AC.

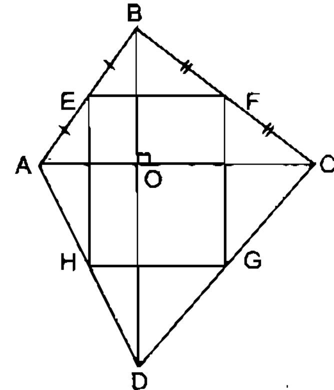
Suy ra EF // HG. (1)

Chứng minh tương tự, EH // FG. (2)

Từ (1) và (2) suy ra EFGH là hình bình hành.

EF // AC, BD $\perp$ AC $\Rightarrow$ EF $\perp$ BD,

EF $\perp$ BD, EH // BD $\Rightarrow$ EF $\perp$ EH.

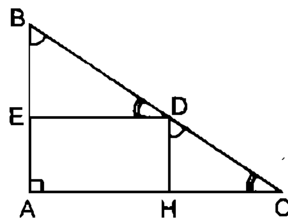


Hình bình hành EFGH có $\widehat{E} = 90^o$ nên là hình chữ nhật.

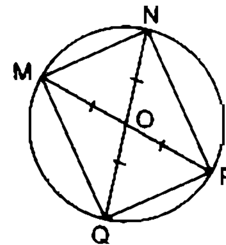
Hình 117

112. (h.118). Tứ giác AEDH là hình bình hành và có một góc vuông nên là hình chữ nhật.

Tứ giác MNPQ có hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình chữ nhật.



a)



b)

Hình 118

113. a) Đúng ; b) Sai ; c) Đúng.

114. (h.119).

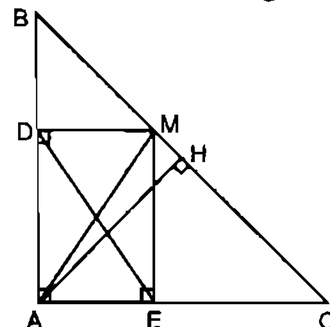
a) Tứ giác ADME có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

ΔDBM vuông có $\widehat{B} = 45^o$ nên là tam giác vuông cân. Suy ra DM = DB.

Chu vi hình chữ nhật ADME bằng :

2(AD + DM) = 2(AD + DB) = 2AB

= 2 . 4 = 8(cm).



Hình 119

b) Gọi H là trung điểm của BC, ta có AH $\perp$ BC.

ADME là hình chữ nhật $\Rightarrow$ DE = AM.

Ta có : $DE = AM \geq AH$. Dấu "=" xảy ra khi $M \equiv H$.

Vậy DE có độ dài nhỏ nhất là AH khi điểm M là trung điểm của BC.

115. (h.120).

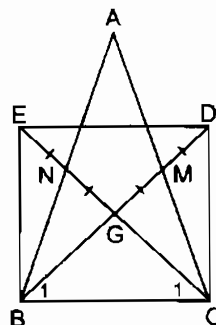
D đối xứng với G qua M $\Rightarrow GD = 2GM$.

G là trọng tâm của $\Delta ABC \Rightarrow BG = 2GM$.

Suy ra $BG = GD$.

Chứng minh tương tự, $CG = GE$.

Tứ giác BEDC có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.



Hình 120

$\Delta CBM = \Delta BCN$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow BG = CG \Rightarrow BD = CE$.

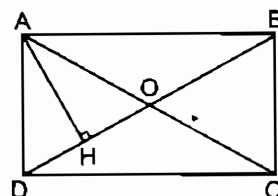
Hình bình hành BEDC có hai đường chéo bằng nhau nên là hình chữ nhật.

116. (h.121). Kẻ đường chéo AC cắt BD ở O, $OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$(cm).

Suy ra $OH = OD - HD = 4 - 2 = 2$(cm).

Các hình chiếu HD, HO bằng nhau nên các đường xiên AD, AO bằng nhau

$\Rightarrow AD = AO = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4$(cm).



Hình 121

Xét ΔABD vuông :

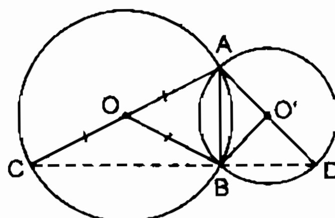
$$AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} \approx 7\text{(cm)}.$$

117. (h.122). $OA = OB = OC$ (bán kính)

$\Rightarrow \Delta ABC$ có đường trung tuyến $BO = \frac{1}{2}AC$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ$.

Chứng minh tương tự, $\widehat{ABD} = 90^\circ$.



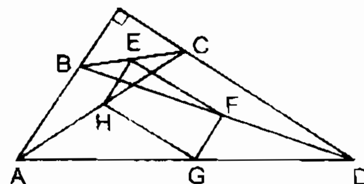
Hình 122

Do đó : $\widehat{ABC} + \widehat{ABD} = 180^\circ \Rightarrow$ C, B, D thẳng hàng.

118. (h.123). Vì HG là đường trung bình của ΔACD nên HG // CD. Tương tự, EF là đường trung bình của ΔBCD nên EF // CD.

Suy ra HG // EF. Chứng minh tương tự. EH // FG. Do đó EFGH là hình bình hành.

Sau đó chứng minh EF ⊥ AB và EF ⊥ EH để suy ra hình bình hành EFGH là hình chữ nhật. Vậy EG = FH (tính chất đường chéo hình chữ nhật).



Hình 123

119. (h.124). Vì DE là đường trung bình của ΔABC nên DE // BC. Do đó DEMH là hình thang. Do DM là đường trung bình của ΔABC nên

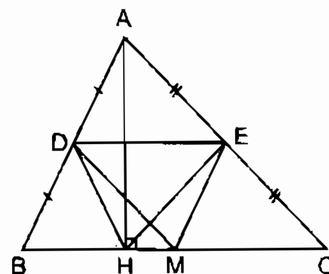
$$DM = \frac{AC}{2}. \qquad (1)$$

Ta có ΔAHC vuông tại H, HE là đường trung tuyến nên

$$HE = \frac{AC}{2}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra DM = HE.

Hình thang DEMH có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.

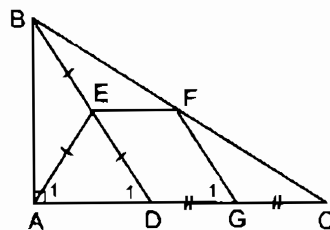


Hình 124

120. (h.125). Vì EF là đường trung bình của ΔBDC nên EF // DC. Do đó AEFG là hình thang.

Do FG là đường trung bình của ΔBDC nên FG // BD. Suy ra $\widehat{G}_1 = \widehat{D}_1$ (đồng vị).

Vì ΔABD vuông tại A, AE là đường trung tuyến nên $AE = \frac{BD}{2} = ED$. Do đó ΔAED cân tại E. Suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{D}_1$.

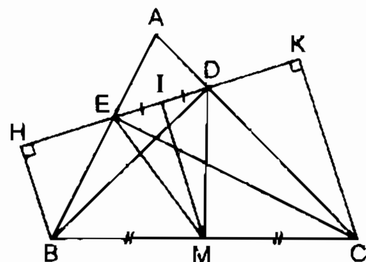


Hình 125

Từ đó $\widehat{G}_1 = \widehat{A}_1$. Hình thang AEFG có hai góc kề một đáy bằng nhau nên là hình thang cân.

Chú ý. Có thể chứng minh hình thang AEFG có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.

121. (h 126). Gọi M là trung điểm của BC, I là trung điểm của DE. Vì ΔBEC vuông tại E, EM là đường trung tuyến nên $EM = \frac{BC}{2}$. Tương tự, ΔBDC vuông tại D, DM là đường trung tuyến nên $DM = \frac{BC}{2}$. Suy ra EM = DM. Do đó ΔMDE cân tại M. Suy ra đường trung tuyến MI là đường cao : MI ⊥ DE.



Hình 126

Hình thang BHKC có BM = MC, MI // BH // CK nên IH = IK.

Do đó IH – IE = IK – ID, tức là EH = DK.

122. (h.127).

a) Tứ giác ADHE có ba góc vuông nên là hình chữ nhật. Do đó AH = DE.

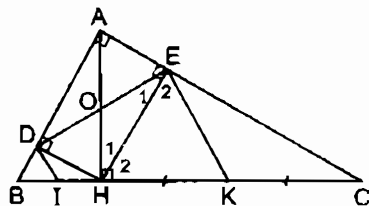
b) Gọi O là giao điểm của AH và DE.

ADHE là hình chữ nhật

$\Rightarrow OH = OE \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{H}_1$. (1)

ΔEHC vuông có EK là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền

$\Rightarrow HK = EK \Rightarrow \hat{E}_2 = \hat{H}_2$. (2)



Hình 127

Từ (1), (2) suy ra

$$\hat{E}_1 + \hat{E}_2 = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = \widehat{AHC} = 90^o.$$

Do đó $\widehat{DEK} = 90^o$. Chứng minh tương tự, $\widehat{EDI} = 90^o$. Vậy DI // EK.

123. (h.128).

a) Ta có $\hat{A}_1 = \hat{C}$ (cùng phụ $\widehat{HAC}$).

AM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của ΔABC ⇒ AM = MC $\Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_2$. Suy ra $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$.

b) Gọi O là giao điểm của AH và DE, I là giao điểm của AM và DE.

ADHE là hình chữ nhật

$\Rightarrow OA = OE \Rightarrow \hat{E}_1 = \widehat{OAE}$. (1)

Ta lại có ΔAHC vuông

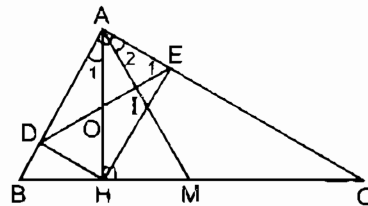
$\Rightarrow \hat{C} + \widehat{OAE} = 90^o$. (2)

Ở chứng minh câu a) ta có :

$\hat{C} = \hat{A}_2$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\hat{E}_1 + \hat{A}_2 = 90^o$.

Suy ra $\widehat{AIE} = 90^o$, tức là AM ⊥ DE.



Hình 128

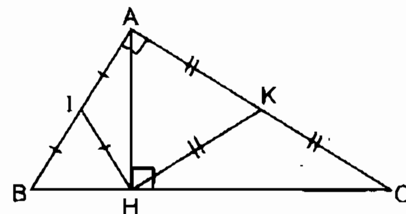
Bài tập bổ sung

9.1. Chọn (B).

9.2. (h.bs.14)

$\widehat{IHK} = \widehat{IHA} + \widehat{AHK}$

$= \widehat{IAH} + \widehat{HAK} = 90^o$.

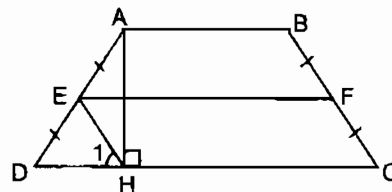


Hình bs.14

9.3. (h.bs.15) HE là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AD nên HE = DE, suy ra $\hat{D} = \hat{H}_1$.

Ta lại có $\hat{D} = \hat{C}$ nên $\hat{H}_1 = \hat{C}$, suy ra HE // CF.

Tứ giác EFCH có EF // CH và HE // CF nên là hình bình hành.



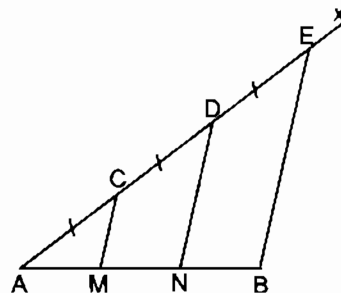
Hình bs.15

§10. Đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước

124. (h.129).

Cách 1. Dùng tính chất đường trung bình của tam giác và đường trung bình của hình thang.

Cách 2. Ta có AC = CD = DE và CM // DN // EB nên theo tính chất các đường thẳng song song cách đều thì AM = MN = NB.



Hình 129

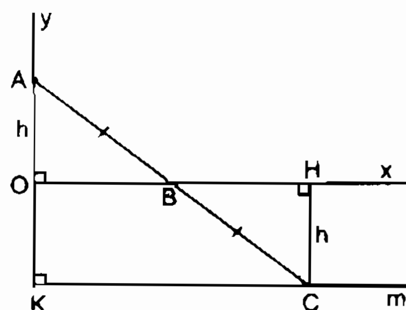
125. (h.130). Kẻ CH ⊥ Ox.

ΔAOB = ΔCHB (cạnh huyền - góc nhọn)

⇒ AO = CH. Đặt AO = h thì CH = h.

Điểm C cách đường thẳng Ox cố định khoảng cách h không đổi nên C di chuyển trên đường thẳng song song với Ox và cách Ox một khoảng bằng h.

Giới hạn : Khi B trùng O thì C trùng K (K đối xứng với A qua O). Khi điểm B di chuyển trên tia Ox thì điểm C di chuyển trên tia Km song song với Ox và cách Ox một khoảng bằng h.

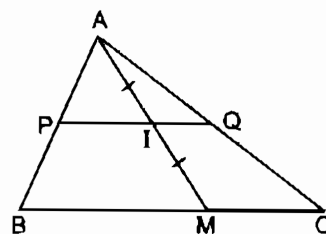


Hình 130

126. (h.131). Qua I kẻ đường thẳng song song với BC, cắt AB và AC theo thứ tự ở P và Q.

ΔAMB có AI = IM, IP // BM nên P là trung điểm của AB. Chứng minh tương tự, Q là trung điểm của AC.

Các điểm P và Q cố định. Vậy điểm I di chuyển trên đoạn thẳng PQ (P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, AC).



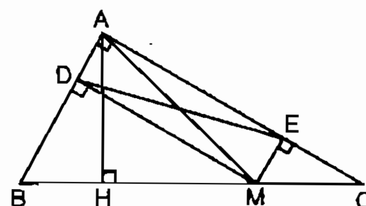
Hình 131

127. (h.132).

a) Tứ giác ADME có ba góc vuông nên là hình chữ nhật. Do đó AM = DE.

b) Kẻ AH ⊥ BC. Ta có DE = AM ≥ AH. Dấu "=" xảy ra khi M trùng H.

Vậy DE có độ dài nhỏ nhất bằng AH khi M là chân đường cao kẻ từ A đến BC.

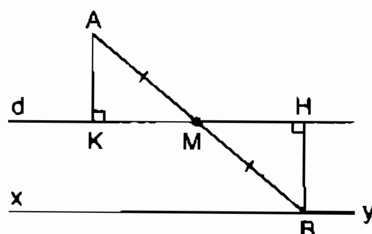


Hình 132

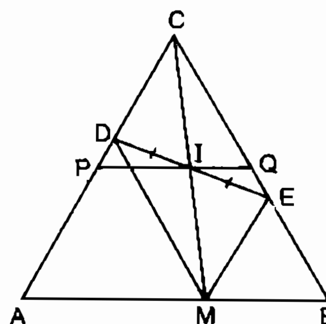
128. (h.133). Kẻ AK, BH vuông góc với d.

ΔAKM = ΔBHM (cạnh huyền - góc nhọn) ⇒ AK = BH.

Điểm B cách đường thẳng d cố định một khoảng bằng AK không đổi nên B di chuyển trên đường thẳng xy // d và cách d một khoảng bằng AK.



Hình 133



Hình 134

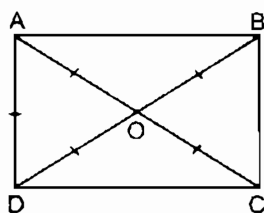
129. (h.134). Gọi C là giao điểm của AD và BE. Ta có ΔABC đều và cố định. Vì CDME là hình bình hành, I là trung điểm của DE nên là trung điểm của CM.

Từ đó chứng minh được I di chuyển trên đoạn thẳng PQ (P, Q theo thứ tự là trung điểm của AC, BC).

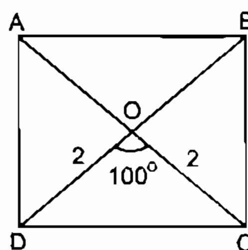
130. (h.135). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Ta có $OA = OD = \frac{1}{2}AC$.

Theo đề bài $AD = \frac{1}{2}AC$. Do đó OA = OD = AD.

Suy ra ΔAOD đều. Vậy $\widehat{AOD} = 60^o$.



Hình 135



Hình 136

131. (h.136). *HD* : Dựng ΔCOD có OC = OD = 2cm, $\widehat{COD} = 100^o$. Sau đó dựng các điểm A và B.

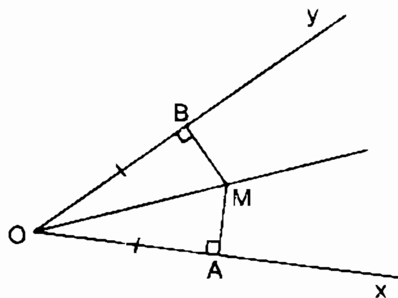
Bài tập bổ sung

10.1. Chọn (B).

10.2. (h.bs.16)

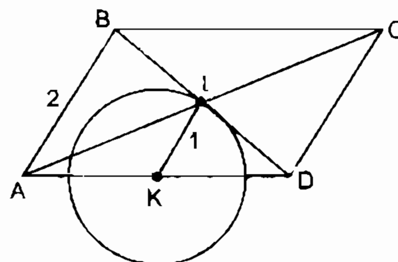
$\Delta AOM = \Delta BOM$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) nên $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$.

Điểm M chuyển động trên tia phân giác của góc xOy.



Hình bs.16

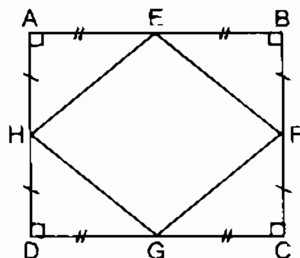
10.3. (h.bs.17) Gọi K là trung điểm của AD thì K là điểm cố định. IK là đường trung bình của ΔABD nên $IK = \frac{AB}{2} = \frac{2}{2} = 1$ (cm). Điểm I cách điểm K cố định một khoảng 1cm nên I chuyển động trên đường tròn (K ; 1cm).



Hình bs.17

§11. Hình thoi

132. (h.137). Xét hình chữ nhật ABCD có E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

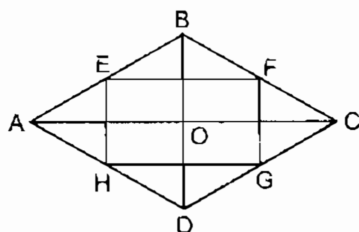


Hình 137

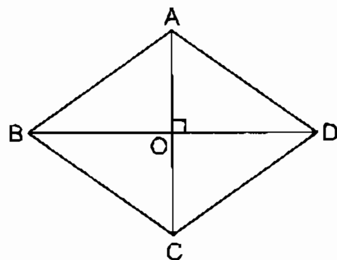
$\Delta AHE = \Delta BFE$ (c.g.c) $\Rightarrow HE = EF$.

Chứng minh tương tự, EF = FG, FG = GH. Tứ giác EFGH có bốn cạnh bằng nhau nên là hình thoi.

133. (h.138). *HD* : Giải tương tự bài 111.



Hình 138



Hình 139

134. (h.139).

a) Ta đã biết, hình bình hành có tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo. Hình thoi cũng là một hình bình hành nên cũng có tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo.

b) Vì AC là đường trung trực của BD nên điểm đối xứng với B qua AC là điểm D, điểm đối xứng với A qua AC là chính nó, điểm đối xứng với C qua AC là chính nó. Như vậy, điểm đối xứng với mỗi đỉnh của hình thoi qua AC cũng thuộc hình thoi. Do đó AC là trục đối xứng của hình thoi.

Chứng minh tương tự, BD cũng là trục đối xứng của hình thoi.

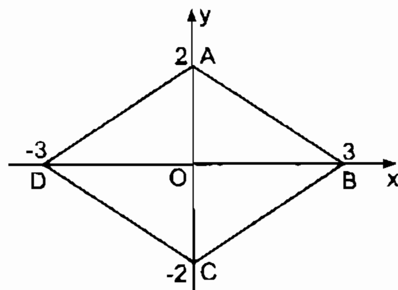
135. (h.140).

Tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành, lại có hai đường chéo vuông góc nên là hình thoi.

Cạnh của hình thoi bằng

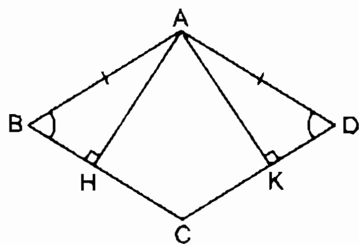
$$\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Chu vi của hình thoi bằng $4\sqrt{13}$.

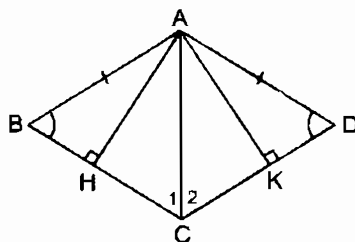


Hình 140

136. a) (h.141). $\Delta AHB = \Delta AKD$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow AH = AK$.



Hình 141



Hình 142

b) (h.142).

Cách 1. Chứng minh $\Delta AHB = \Delta AKD$ để suy ra AB = AD. Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình thoi.

Cách 2. Chứng minh $\Delta AHC = \Delta AKC$ để suy ra $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$.

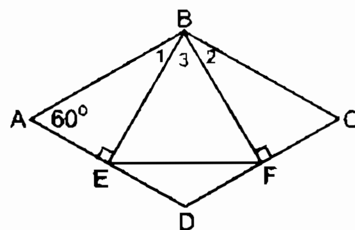
Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc nên là hình thoi.

137. (h.143).

$\Delta AEB = \Delta CFB$ (cạnh huyền - góc nhọn)
$\Rightarrow BE = BF \Rightarrow \Delta BEF$ cân.

Dễ dàng chứng minh được $\widehat{ABC} = 120^o$,
$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = 30^o$. Do đó $\widehat{B}_3 = 60^o$.

Vậy ΔBEF là tam giác đều.

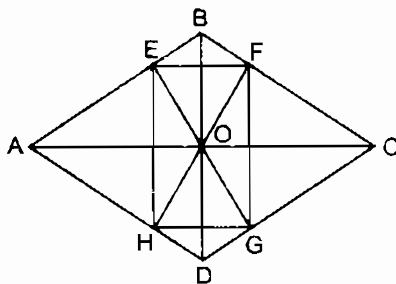


Hình 143

138. (h.144). Ta có $OE \perp AB$, $OG \perp CD$, mà AB // CD nên ba điểm E, O, G thẳng hàng.

Chứng minh tương tự, ba điểm H, O, F thẳng hàng.

Điểm O thuộc tia phân giác của góc B nên cách đều hai cạnh của góc. Do đó OE = OF. Chứng minh tương tự, OF = OG, OG = OH.



Hình 144

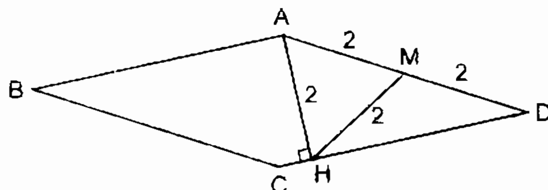
Tứ giác EFGH có hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình chữ nhật.

139. (h.145). Gọi M là trung điểm của AD, ta có : HM = MA = MD = 2cm.

Theo đề bài AH = 2cm. Do đó ΔAHM là tam giác đều

$$\Rightarrow \widehat{MAH} = 60^o \Rightarrow \widehat{D} = 30^o.$$

Từ đó : $\widehat{B} = \widehat{D} = 30^o$, $\widehat{A} = \widehat{C} = 150^o$.



Hình 145

140. (h.146). Vì ΔABD cân và có $\widehat{A} = 60^o$ nên là tam giác đều. Suy ra

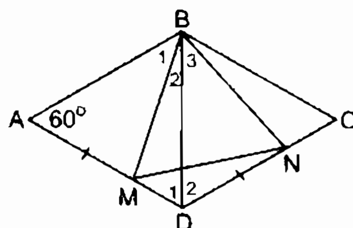
AB = BD, $\widehat{ABD} = \widehat{D}_1 = 60^o$. Do đó $\widehat{D}_2 = 60^o$.

ΔABM = ΔDBN (c.g.c)

$\Rightarrow$ BM = BN, $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_3$.

Ta lại có $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 60^o$ nên $\widehat{B}_3 + \widehat{B}_2 = 60^o$.

ΔBMN cân và có $\widehat{MBN} = 60^o$ nên là tam giác đều.

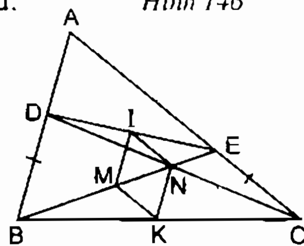


Hình 146

141. (h.147).

Áp dụng định lí về đường trung bình của tam giác để chứng minh MI = IN = NK = KM (cùng bằng $\frac{BD}{2}$ và $\frac{CE}{2}$).

MINK là hình thoi nên IK ⊥ MN.



Hình 147

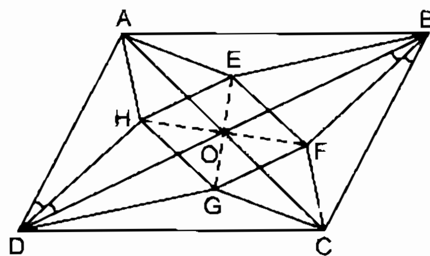
142. (h.148). Vì OH, OF là các tia phân giác của hai góc đối đỉnh $\widehat{AOD}$, $\widehat{BOC}$ nên dễ dàng chứng minh được H, O, F thẳng hàng. Chứng minh tương tự, E, O, G thẳng hàng.

ΔBOF và ΔDOH có :

$$OB = OD,$$

$$\widehat{OBF} = \widehat{ODH},$$

$$\widehat{BOF} = \widehat{DOH}.$$



Hình 148

Do đó $\Delta BOF = \Delta DOH$ (g.c.g). Suy ra OH = OF.

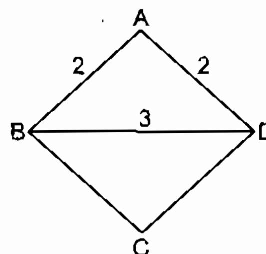
Chứng minh tương tự, OE = OG. Do đó EFGH là hình bình hành.

Ta lại có $OH \perp OE$ (tia phân giác của hai góc kề bù).
Do đó hình bình hành EFGH là hình thoi.

143. (h.149). *HD :* Dựng ΔABD, biết ba cạnh :

$$BD = 3cm,\ AB = AD = 2cm.$$

Sau đó dựng điểm C.

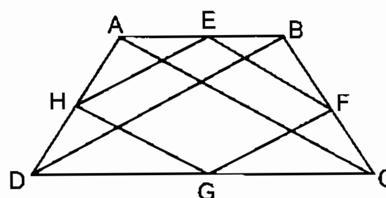


Hình 149

Bài tập bổ sung

11.1. Chọn (B).

11.2. (h.bs.18) EFGH là hình thoi. Hãy chứng minh EF = FG = GH = HE.

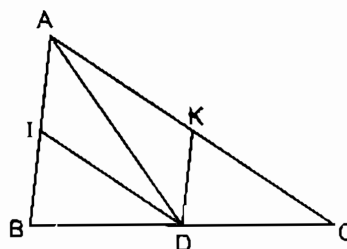


Hình bs.18

11.3. (h.bs.19)

a) Tứ giác AIDK có AI // DK và AK // DI nên là hình bình hành.

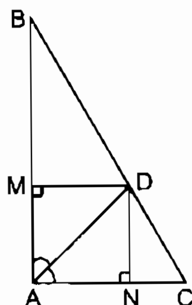
b) Hình bình hành AIDK là hình thoi $\Leftrightarrow$ AD là tia phân giác của góc A.



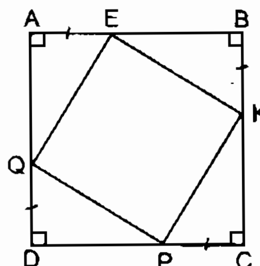
Hình bs.19

§12. Hình vuông

144. (h.150). Tứ giác AMDN có ba góc vuông nên là hình chữ nhật. Hình chữ nhật AMDN có đường chéo AD là đường phân giác của góc A nên là hình vuông.



Hình 150

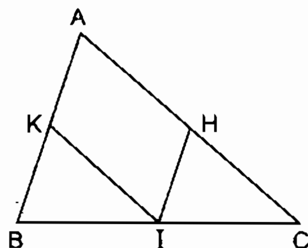


Hình 151

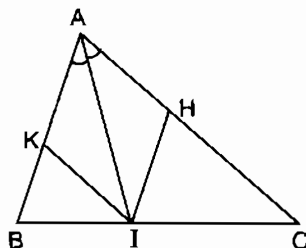
145. (h.151). EKPQ là hình vuông. (*HD*. Hãy chứng minh rằng EK = KP = PQ = QE và $\widehat{KEQ} = 90^o$).

146. (h.152).

a) Tứ giác AHIK có IH // AK, AH // KI nên là hình bình hành.



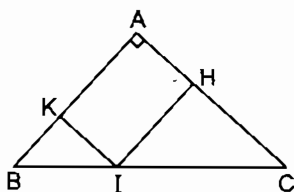
Hình 152



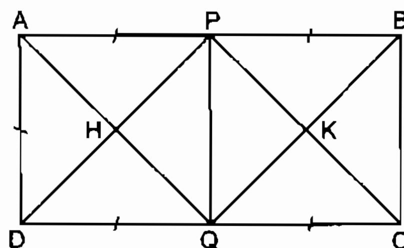
Hình 153

b) Hình bình hành AHIK là hình thoi ⇔ AI là đường phân giác của góc A. Vậy nếu I là giao điểm của tia phân giác của góc A với cạnh BC thì AHIK là hình thoi (h.153).

c) Hình bình hành AHIK là hình chữ nhật ⇔ $\widehat{A} = 90^o$. Vậy nếu tam giác ABC vuông tại A thì AHIK là hình chữ nhật (h.154).



Hình 154



Hình 155

147. (h.155). Tứ giác APCQ có AP // QC, AP = QC nên là hình bình hành. Suy ra AQ // PC. Chứng minh tương tự, BQ // PD.

Tứ giác PHQK có PH // QK, PK // QH nên là hình bình hành.

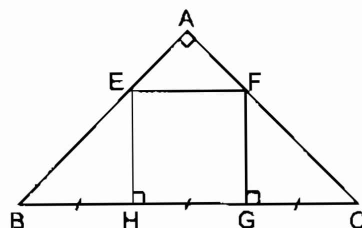
Tứ giác APQD có AP // DQ, AP = DQ nên là hình bình hành. Hình bình hành APQD có $\widehat{A} = 90^o$ nên là hình chữ nhật. Hình chữ nhật APQD có AP = AD nên là hình vuông. Suy ra $\widehat{PHQ} = 90^o$ và PH = HQ.

Hình bình hành PHQK có $\widehat{PHQ} = 90^o$ và PH = HQ nên dễ dàng chứng minh được đó là hình vuông.

148. (h.156). Tam giác vuông FGC có $\widehat{C} = 45^o$ nên là tam giác vuông cân. Do đó FG = GC.

Chứng minh tương tự, EH = HB. Do BH = HG = GC nên EH = HG = FG.

Tứ giác EFGH có EH // FG, EH = FG nên là hình bình hành. Hình bình hành EFGH lại có $\widehat{H} = 90^o$, EH = HG nên dễ dàng chứng minh được đó là hình vuông.

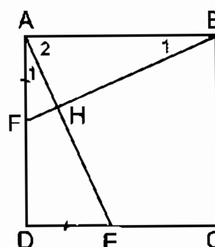


Hình 156

149. (h.157).

$\Delta ADE = \Delta BAF$ (c.g.c) $\Rightarrow AE = BF$, $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$.

Ta lại có $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 90^o$ nên $\widehat{B}_1 + \widehat{A}_2 = 90^o$. Gọi H là giao điểm của AE và BF, ta có $\widehat{H} = 90^o$. Vậy $AE \perp BF$.



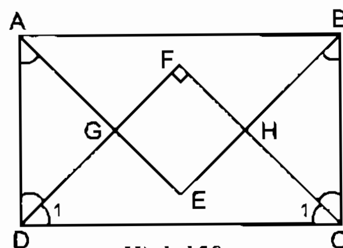
Hình 157

150. (h.158). Vì ΔFDC có $\widehat{D}_1 = 45^o$, $\widehat{C}_1 = 45^o$ nên $\widehat{DFC} = 90^o$. Chứng minh tương tự, $\widehat{E} = 90^o$, $\widehat{G} = 90^o$. Tứ giác EHFG có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

$\Delta AGD = \Delta BHC$ (g.c.g) $\Rightarrow GD = HC$.

ΔFDC cân tại F $\Rightarrow FD = FC$.

Suy ra FD – GD = FC – HC, tức là FG = FH.



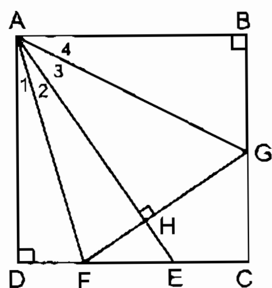
Hình 158

Hình chữ nhật EHFG có FG = FH nên là hình vuông.

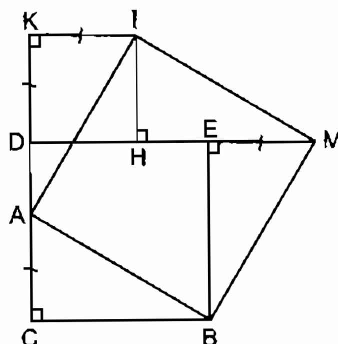
151. (h.159). $\Delta ADF = \Delta AHF$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow AD = AH$.
Ta lại có AD = AB nên AB = AH.

$\Delta ABG = \Delta AHG$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{A}_4 = \widehat{A}_3$.

Ta có $\widehat{FAG} = \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = \frac{1}{2}(\widehat{DAH} + \widehat{HAB}) = \frac{1}{2} . 90^o = 45^o$.



Hình 159



Hình 160

152. (h.160). *HD :* Chứng minh các tam giác vuông ACB, IKA, IHM, MEB bằng nhau để suy ra AB = IA = IM = MB. Sau đó chứng minh $\widehat{IAB} = 90^o$.

153. (h.161).

a) Ta có $\widehat{EAC} = \widehat{BAH}$, $\Delta EAC = \Delta BAH$ (c.g.c). Suy ra EC = BH, $\widehat{AEC} = \widehat{ABH}$.

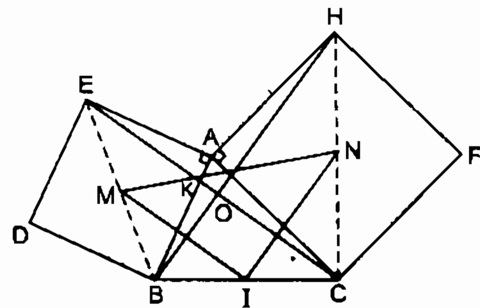
Gọi giao điểm của EC với BA và BH là K và O. Xét hai tam giác AEK và OBK, có $\widehat{AEK} = \widehat{OBK}$, $\widehat{AKE} = \widehat{OKB}$ nên $\widehat{EAK} = \widehat{BOK}$. Do $\widehat{EAK} = 90^o$ nên $\widehat{BOK} = 90^o$. Vậy EC ⊥ BH.

b) Ta có MI // EC, $MI = \dfrac{EC}{2}$,

IN // BH, $IN = \dfrac{BH}{2}$.

Do EC = BH nên MI = IN.

Do EC ⊥ BH nên ta chứng minh được MI ⊥ IN. Vậy, tam giác MIN là tam giác vuông cân.



Hình 161

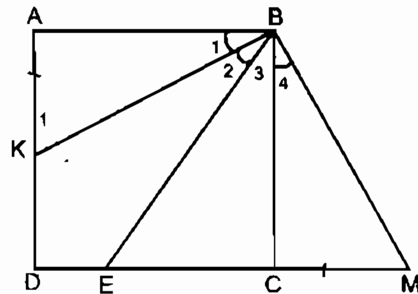
154. (h.162). Để làm xuất hiện tổng AK + CE, ta lấy điểm M trên tia đối của tia CD sao cho CM = AK. Ta có

$$AK + CE = CM + CE = EM.$$

Cần chứng minh EM = BE. Ta sẽ chứng minh ΔEBM có $\widehat{M} = \widehat{EBM}$.

Thật vậy, $\Delta BAK = \Delta BCM$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{K}_1 = \widehat{M}, \widehat{B}_1 = \widehat{B}_4.$$



Hình 162

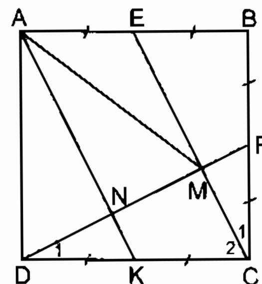
Ta lại có $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ nên $\widehat{B}_2 = \widehat{B}_4$. Từ đó,

$$\widehat{EBM} = \widehat{B}_3 + \widehat{B}_4 = \widehat{B}_3 + \widehat{B}_2 = \widehat{KBC} = \widehat{K}_1 = \widehat{M}.$$

ΔEBM cân ⇒ BE = ME.

Do đó BE = MC + CE = AK + CE.

155. (h.163).



Hình 163

a) $\Delta CBE = \Delta DCF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$.

Ta lại có $\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 90^o$ nên $\widehat{D}_1 + \widehat{C}_2 = 90^o$.

Suy ra $CE \perp DF$.

b) Gọi K là trung điểm của CD. Tứ giác AECK có AE // CK, AE = CK nên là hình bình hành. Suy ra AK // CE.

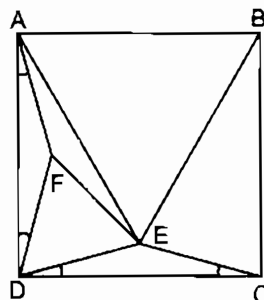
Gọi N là giao điểm của AK và DF.

Tam giác DCM có DK = KC, KN // CM nên N là trung điểm của DM.

Ta có $CM \perp DM$ (câu a), KN // CM nên $KN \perp DM$.

Tam giác ADM có AN là đường cao và đường trung tuyến nên là tam giác cân. Do đó AM = AD.

156. (h.164).



Hình 164

a) *HD* : $\Delta EDC = \Delta FAD$ (g.c.g).

Hãy chứng minh ΔDEF cân và có $\widehat{EDF} = 60^o$ để suy ra ΔDEF đều.

b) Ta có $\widehat{AFD} = 150^o$, $\widehat{DFE} = 60^o$ nên

$$\widehat{AFE} = 360^o - (150^o + 60^o) = 150^o.$$

Ta lại có FD = FE, từ đó

$\Delta AFE = \Delta AFD$ (c.g.c). Suy ra AE = AD.

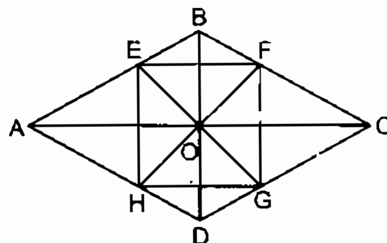
Chứng minh tương tự, BE = BC.

Tam giác ABE có AE = AB = BE nên là tam giác đều.

Bài tập bổ sung

12.1. Chọn (C).

12.2. (h.bs.20)



Hình bs.20

$\Delta BOE = \Delta BOF$ (g.c.g) nên OE = OF.

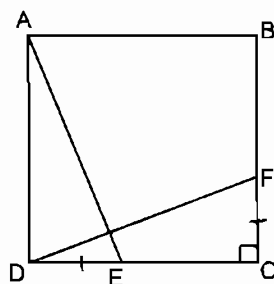
Ta lại có $OE \perp OF$ (tia phân giác của hai góc kề bù). Suy ra ΔEOF vuông cân tại O.

Tương tự các tam giác FOG, GOH, HOE vuông cân tại O. Từ đó chứng minh EFGH là hình vuông.

12.3. (h.bs.21)

$\Delta ADE = \Delta DCF$ (c.g.c), suy ra AE = DF và $\widehat{DAE} = \widehat{CDF}$.

Ta lại có $\widehat{CDF} + \widehat{ADF} = 90^0$ nên $\widehat{DAE} + \widehat{ADF} = 90^0$. Do đó $AE \perp DF$.



Hình bs.21

Bài tập ôn chương I

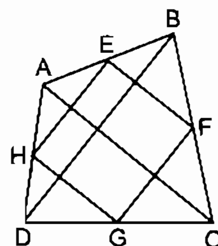
157. (h.165). Dễ dàng chứng minh EFGH là hình bình hành có EH // BD, $EH = \frac{BD}{2}$, EF // AC, $EF = \frac{AC}{2}$.

a) EFGH là hình chữ nhật $\Leftrightarrow EH \perp EF$

$\Leftrightarrow BD \perp AC$.

b) EFGH là hình thoi $\Leftrightarrow$ EH = EF $\Leftrightarrow$ BD = AC.

c) EFGH là hình vuông $\Leftrightarrow BD \perp AC$ và BD = AC.



Hình 165

158. (h.166).

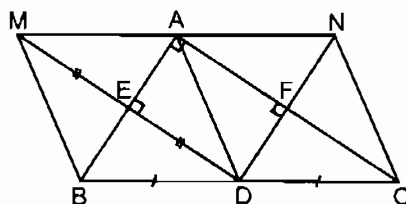
a) Tứ giác AEDF là hình chữ nhật. Học sinh tự giải thích.

b) ΔABC có BD = DC, DE // AC nên AE = BE.

Ta lại có DE = EM (D đối xứng với M qua AB).

Tứ giác ADBM có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành. Hình bình hành ADBM có hai đường chéo vuông góc $AB \perp DM$ nên là hình thoi.

Chứng minh tương tự, ADCN là hình thoi.



Hình 166

c) ADBM là hình thoi $\Rightarrow$ AM // BD $\Rightarrow$ AM // BC.

Chứng minh tương tự, AN // BC.

Qua A ta có AM // BC, AN // BC nên M, A, N thẳng hàng. (1)

Ta lại có AM = BD, AN = DC mà BD = DC nên AM = AN. (2)

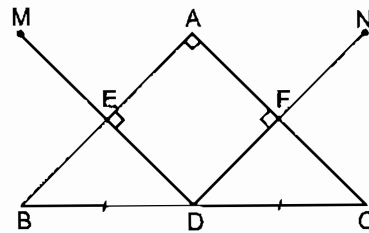
Từ (1) và (2) suy ra A là trung điểm của MN, do đó M đối xứng với N qua A.

d) Hình chữ nhật AEDF là hình vuông $\Leftrightarrow$ AE = AF.

Ta lại có $AE = \frac{1}{2}AB$, $AF = \frac{1}{2}AC$ nên

AE = AF $\Leftrightarrow$ AB = AC.

Vậy, nếu ΔABC vuông cân tại A thì AEDF là hình vuông (h.167).



Hình 167

159. (h.168).

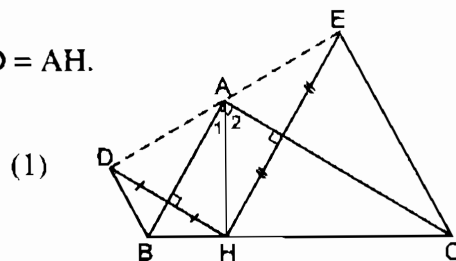
a) AB là đường trung trực của HD $\Rightarrow$ AD = AH.

Chứng minh tương tự, AE = AH.

Suy ra AD = AE. (1)

Tam giác AHD cân nên $\widehat{HAD} = 2\widehat{A}_1$.

Chứng minh tương tự, $\widehat{HAE} = 2\widehat{A}_2$.



Hình 168

Suy ra $\widehat{HAD} + \widehat{HAE} = 2\widehat{A}_1 + 2\widehat{A}_2 = 2(\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2)$

$$= 2 . 90^o = 180^o.$$

Do đó D, A, E thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) suy ra A là trung điểm của DE. Vậy D đối xứng với E qua A.

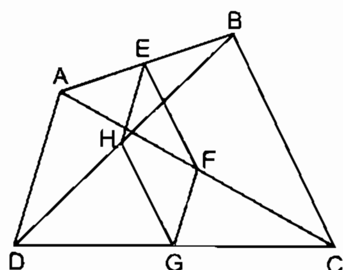
b) Tam giác DHE có HA là đường trung tuyến và $HA = \frac{1}{2}DE$ nên ΔDHE vuông tại H.

c) Hãy chứng minh $\widehat{ADB} = \widehat{AHB} = 90^o$, $\widehat{AEC} = 90^o$ để suy ra BDEC là hình thang vuông.

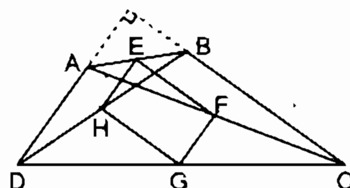
d) Hãy chứng minh BD = BH, CE = CH.

160. (h.169). Dễ dàng chứng minh được EFGH là hình bình hành có EH // AD,

$EH = \frac{AD}{2}$, EF // BC, $EF = \frac{BC}{2}$.



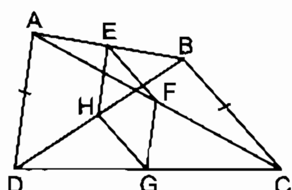
Hình 169



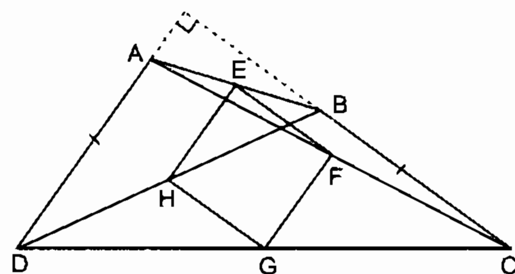
Hình 170

a) EFGH là hình chữ nhật ⇔ EH ⊥ EF ⇔ AD ⊥ BC (h.170).

b) EFGH là hình thoi ⇔ EH = EF ⇔ AD = BC (h.171).



Hình 171



Hình 172

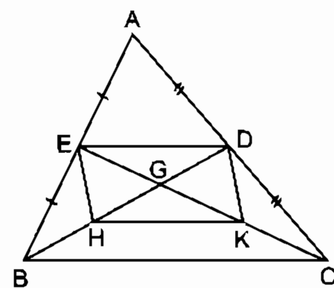
c) EFGH là hình vuông ⇔ AD ⊥ BC và AD = BC (h.172).

161. (h.173).

a) Ta có EG = GK (cùng bằng $\frac{1}{2}$CG),

DG = GH (cùng bằng $\frac{1}{2}$BG)

nên tứ giác DEHK là hình bình hành (các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường).



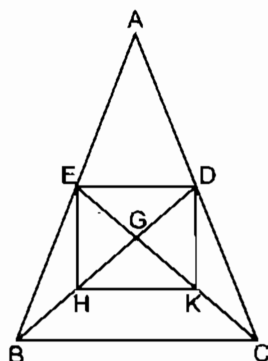
Hình 173

b) Hình bình hành DEHK là hình chữ nhật ⇔

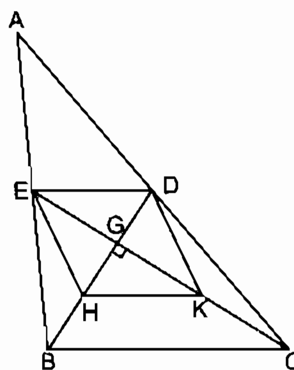
⇔ HD = EK ⇔ GE = GD và GH = GK

⇔ ΔGEB = ΔGDC (c.g.c)

⇔ BE = CD ⇔ ΔABC cân tại A (h.174).



Hình 174

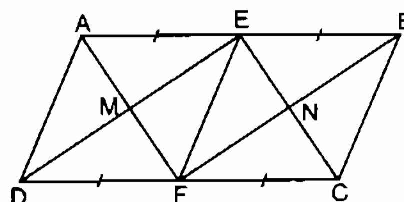


Hình 175

c) Nếu BD ⊥ CE thì hình bình hành DEHK có hai đường chéo vuông góc nên là hình thoi (h.175).

162. (h.176).

a) Tứ giác AEFD là hình thoi, tứ giác AECF là hình bình hành. Học sinh tự chứng minh.



Hình 176

b) Tứ giác AECF là hình bình hành nên EN // FM. Chứng minh tương tự, EM // FN. Do đó EMFN là hình bình hành.

AEFD là hình thoi nên AF ⊥ DE.

Hình bình hành EMFN có $\widehat{M} = 90^o$ nên là hình chữ nhật.

c) Hình chữ nhật EMFN là hình vuông

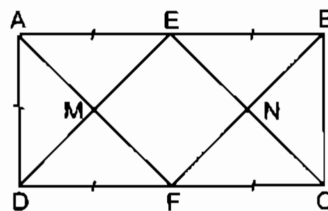
⇔ ME = MF ⇔ DE = AF (vì DE = 2ME, AF = 2MF)

⇔ hình thoi AEFD có hai đường chéo bằng nhau

⇔ AEFD là hình vuông ⇔ $\widehat{A} = 90^o$.

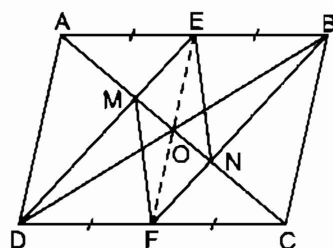
⇔ hình bình hành ABCD là hình chữ nhật.

Như vậy, hình chữ nhật EMFN là hình vuông nếu ABCD là hình chữ nhật (h.177, chú ý vẫn có điều kiện AB = 2AD).



Hình 177

163. (h.178).



Hình 178

a) Tứ giác DEBF là hình bình hành. Học sinh tự chứng minh.

b) Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành ABCD, ta có O là trung điểm của BD.

Theo câu a), DEBF là hình bình hành nên trung điểm O của BD cũng là trung điểm của EF.

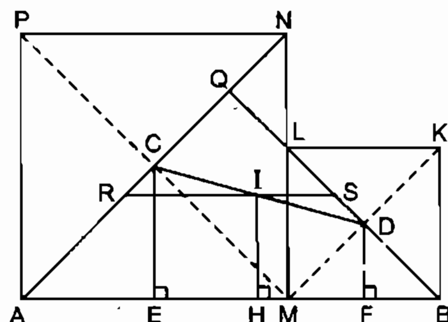
Vậy AC, BD, EF cùng cắt nhau tại điểm O.

c) ΔABD có các đường trung tuyến AO, DE cắt nhau ở M nên $OM = \frac{1}{3}OA$.

Chứng minh tương tự, $ON = \frac{1}{3}OC$. Ta có OA = OC nên OM = ON.

Tứ giác EMFN có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường OM = ON, OE = OF nên là hình bình hành.

164. (h.179).



Hình 179

a) Kẻ CE, IH, DF vuông góc với AB. Ta chứng minh được

$$CE = \frac{AM}{2},\ DF = \frac{MB}{2},$$

$$CE + DF = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$$

nên $IH = \frac{a}{4}$.

b) Khi điểm M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì I di chuyển trên đoạn thẳng RS song song với AB và cách AB một khoảng bằng $\frac{a}{4}$ (R là trung điểm của AQ, S là trung điểm của BQ, Q là giao điểm của BL và AN).

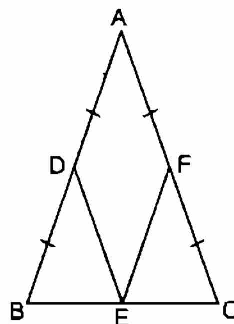
Bài tập bổ sung

I.1. a) hình bình hành ;

b) hình chữ nhật ;

c) hình thoi.

I.2. (h.bs.22)



Hình bs.22

a) Tứ giác ADEF có bốn cạnh bằng nhau nên là hình thoi.

b) Hình thoi ADEF là hình vuông ⇔ $\widehat{A} = 90^{\circ}$ ⇔ ΔABC vuông cân tại A.

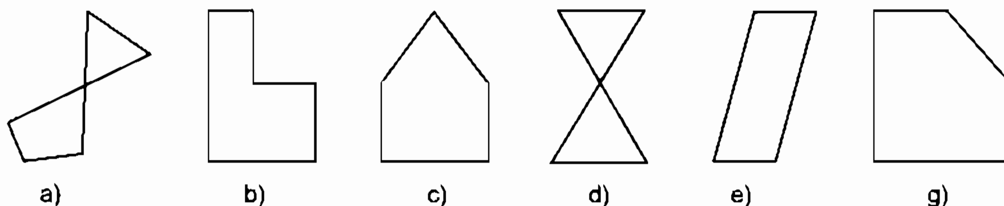
Chương II

ĐA GIÁC. DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

ĐỀ BÀI

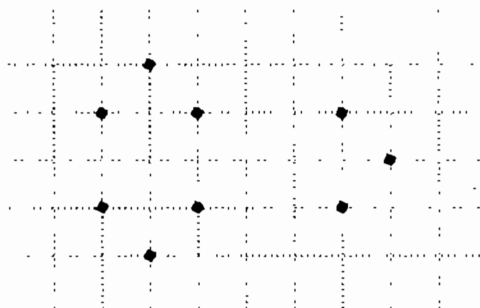
§1. Đa giác. Đa giác đều

1. Trong các hình dưới đây (h.180), hình nào là đa giác lồi ? Vì sao ?



Hình 180

2. Hãy vẽ một số đa giác (lồi) mà các đỉnh là một số điểm trong các điểm đã cho ở hình 181 (trên lưới kẻ ô vuông).


Hình 181

3. Em hãy kể tên một số đa giác đều mà em biết.

4. Chứng minh rằng số đo góc của hình n-giác đều là $\frac{(n-2).180^{o}}{n}$.

5. Tính số đo góc của hình 8 cạnh đều, 10 cạnh đều, 12 cạnh đều.

6. a) Vẽ hình và tính số đường chéo của ngũ giác, lục giác.

   b) Chứng minh rằng hình n-giác có tất cả $\frac{n(n-3)}{2}$ đường chéo.

7. Tìm số đường chéo của hình 8 cạnh, 10 cạnh, 12 cạnh.

8. Chứng minh rằng tổng các góc ngoài của một đa giác (lồi) có số đo là 360^{o}.

9. Đa giác nào có tổng số đo các góc (trong) bằng tổng số đo các góc ngoài ?

10. Một đa giác (lồi) có nhiều nhất là bao nhiêu góc nhọn ?

11. Một đa giác đều có tổng số đo tất cả các góc ngoài và một góc trong của đa giác bằng 468^{o}. Hỏi đa giác đều đó có mấy cạnh ?

Bài tập bổ sung

1.1. Mỗi câu sau đây đúng hay sai ?

a) Tam giác và tứ giác không phải là đa giác.

b) Hình gồm n đoạn thẳng đôi một có một điểm chung được gọi là đa giác (với n là số tự nhiên lớn hơn 2).

c) Hình gồm n đoạn thẳng (n là số tự nhiên lớn hơn 2) trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào có một điểm chung cũng không cùng nằm trên một đường thẳng được gọi là đa giác.

d) Hình tạo bởi nhiều hình tam giác được gọi là đa giác.

e) Đa giác luôn nằm trong nửa mặt phẳng cho trước được gọi là đa giác lồi.

f) Đa giác luôn nằm trong nửa mặt phẳng có bờ là một đường thẳng chứa một cạnh của nó được gọi là đa giác lồi.

g) Hình gồm hai đa giác lồi cho trước là một đa giác lồi.

1.2. a) Cho tam giác đều ABC. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh MNP là tam giác đều.

b) Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N, P, Q tương ứng là trung điểm của các cạnh BC, CD, DA, AB. Chứng minh MNPQ là hình vuông (tứ giác đều).

c) Cho ngũ giác đều ABCDE. Gọi M, N, P, Q, R tương ứng là trung điểm của các cạnh BC, CD, DE, EA, AB. Chứng minh MNPQR là ngũ giác đều.

1.3. Cho hình vuông ABCD có AB = 3cm.
Trên tia đối của tia BA lấy điểm K sao cho BK = 1cm.
Trên tia đối của tia CB lấy điểm L sao cho CL = 1cm.
Trên tia đối của tia DC lấy điểm M sao cho MD = 1cm.
Trên tia đối của tia AD lấy điểm N sao cho NA = 1cm.
Chứng minh KLMN là hình vuông.

§2. Diện tích hình chữ nhật

12. Diện tích hình chữ nhật thay đổi như thế nào nếu :

a) Chiều dài tăng 3 lần, chiều rộng không thay đổi ?

b) Chiều rộng giảm 2 lần, chiều dài không thay đổi ?

c) Chiều dài và chiều rộng đều tăng 4 lần ?

d) Chiều dài tăng 4 lần, chiều rộng giảm 3 lần ?

13. Cho hình chữ nhật có diện tích là 20 (đơn vị diện tích) và hai kích thước là x và y (đơn vị dài).

a) Hãy điền vào ô trống trong bảng sau

x	1		4		8		20
y		10		4		2	

b) Theo bảng vừa thành lập, hãy biểu diễn bảy điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{20}{x}$ trên hệ trục toạ độ xOy.

14. a) Diện tích của hình chữ nhật tăng bao nhiêu phần trăm nếu mỗi cạnh tăng 10% ?

b) Diện tích của hình chữ nhật giảm bao nhiêu phần trăm nếu mỗi cạnh giảm 10% ?

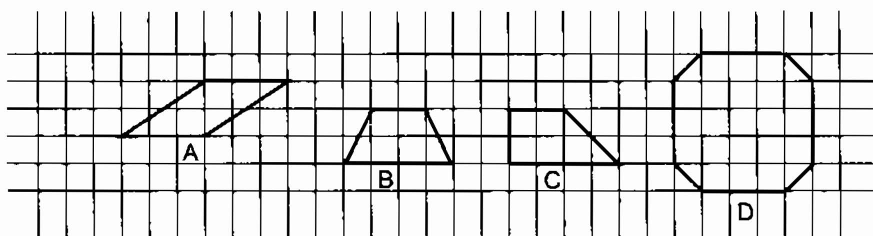
15. Diện tích hình chữ nhật bằng $48cm^2$, một cạnh của nó có độ dài 8cm. Đường thẳng song song với một trong các cạnh của hình chữ nhật chia hình chữ nhật đó thành hai hình chữ nhật bằng nhau. Tính chu vi của mỗi hình chữ nhật được tạo thành.

16. Tính các cạnh của một hình chữ nhật, biết rằng bình phương của độ dài một cạnh là 16(cm) và diện tích của hình chữ nhật là $28cm^2$.

17. Tính các cạnh của một hình chữ nhật, biết tỉ số các cạnh là $\frac{4}{9}$ và diện tích của nó là $144cm^2$.

18. Cho tam giác vuông cân, biết độ dài cạnh huyền là l. Tính diện tích tam giác đó.

19. Tính diện tích các hình trên hình 182 (mỗi ô vuông là một đơn vị diện tích). Hãy giải thích vì sao tính được như vậy.



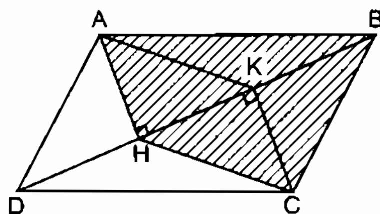
Hình 182

20. Trên giấy kẻ ô vuông, hãy vẽ :

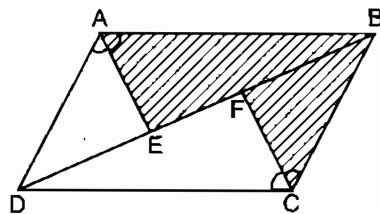
a) Hai hình chữ nhật có cùng chu vi nhưng khác diện tích.

b) Hai hình chữ nhật có kích thước khác nhau nhưng cùng diện tích.

21. Cho hình bình hành ABCD (h.183). Từ A và C kẻ AH và CK vuông góc với đường chéo BD. Chứng minh rằng hai đa giác ABCH và ADCK có cùng diện tích.



Hình 183



Hình 184

22. Cho hình bình hành ABCD (h.184). Đường phân giác của các góc A và C cắt đường chéo BD tại E, F.

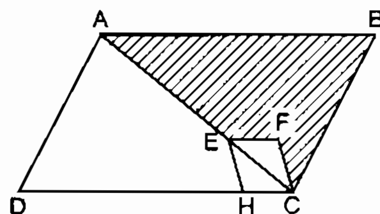
a) Chứng minh rằng hai hình ABCFE và ADCFE có cùng diện tích.

b) Các hình đó có phải là đa giác lồi không ? Vì sao ?

23. Trên hình 185, các tứ giác ABCD và EFCH đều là hình bình hành. Điểm E nằm trên đường chéo AC.

a) Chứng minh rằng đa giác AEHD và hình ABCFE có cùng diện tích.

b) ABCFE có phải là đa giác lồi không ? Vì sao ?



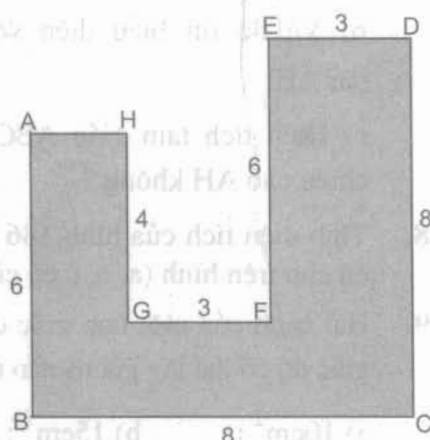
Hình 185

24. Cho một tam giác vuông cân. Chứng minh rằng tổng diện tích của hai hình vuông dựng trên hai cạnh góc vuông bằng diện tích của hình vuông dựng trên cạnh huyền (không sử dụng định lí Py-ta-go).

Bài tập bổ sung

2.1. a) Nền của một phòng học có dạng hình chữ nhật, với chiều rộng đo được là 4m và chiều dài là 6m. Để có thể lát kín nền đó cần bao nhiêu viên gạch có hình vuông, với cạnh là 33,33cm ?

b) Cần bao nhiêu viên gạch có hình vuông, với cạnh là 25cm để có thể lát kín một mảnh sân có dạng như hình bs.23 (biết AB = 6m, BC = 8m, CD = 8m, DE = 3m, EF = 6m, FG = 3m, GH = 4m và góc tại các đỉnh A, B, C, D, E, F, G, H đều là góc vuông) ?



Hình bs.23

2.2. a) Dùng diện tích để chứng tỏ : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

b) Dùng diện tích để chứng tỏ : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ với điều kiện $b < a$.

2.3. *Đố vui.*

a) Có thể dùng kéo cắt 1 lần và chỉ cắt theo đường thẳng, chia một hình chữ nhật thành hai mảnh để ghép lại được một tam giác vuông hay không?

b) Có thể dùng kéo cắt 2 lần và chỉ cắt theo đường thẳng, chia một hình chữ nhật thành ba mảnh để ghép lại được một tam giác thường hay không?

§3. Diện tích tam giác

25. Hai đường chéo của hình chữ nhật chia hình chữ nhật thành bốn tam giác. Diện tích của các tam giác đó có bằng nhau không ? Vì sao ?

26. Cho tam giác ABC có đáy BC cố định và đỉnh A di động trên một đường thẳng d cố định song song với đường thẳng BC. Chứng minh rằng tam giác ABC luôn có diện tích không đổi.

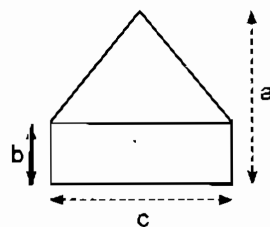
27. Tam giác ABC có đáy BC cố định và dài 4cm. Đỉnh A di chuyển trên đường thẳng d ($d \perp BC$). Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống đường thẳng BC.

a) Điền vào ô trống trong bảng sau :

Độ dài AH (cm)	1	2	3	4	5	10	15	20
S_{ABC} (cm^2)								

b) Vẽ đồ thị biểu diễn số đo S_{ABC} theo độ dài AH.

c) Diện tích tam giác ABC có tỉ lệ thuận với chiều cao AH không ?



Hình 186

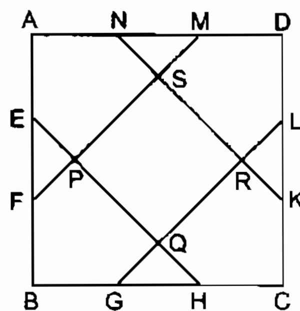
28. Tính diện tích của hình 186 theo các kích thước đã cho trên hình (a, b, c có cùng đơn vị đo).

29. Hai cạnh của một tam giác có độ dài là 5cm và 6cm. Hỏi diện tích của tam giác đó có thể lấy giá trị nào trong các giá trị sau :

a) $10cm^2$; b) $15cm^2$; c) $20cm^2$.

30. Cho tam giác ABC, biết AB = 3AC. Tính tỉ số hai đường cao xuất phát từ các đỉnh B và C.

31. Các điểm E, F, G, H, K, L, M, N chia mỗi cạnh hình vuông ABCD thành ba đoạn thẳng bằng nhau. Gọi P, Q, R, S là giao điểm của EH và NK với FM và GL (h.187). Tính diện tích của ngũ giác AEPSN và của tứ giác PQRS, biết AB = 6cm.



Hình 187

Bài tập bổ sung

3.1. a) Có thể dùng kéo cắt 2 lần và chỉ cắt theo đường thẳng chia một tam giác (thường) thành ba mảnh để ghép lại được một hình chữ nhật hay không?

Từ đó suy ra công thức tính diện tích tam giác thường dựa vào công thức tính diện tích hình chữ nhật.

b) Hãy chia một tam giác thành 2 phần có diện tích bằng nhau bởi một đường thẳng đi qua đỉnh của tam giác đó.

c) Hãy chia một tam giác thành 4 phần có diện tích bằng nhau bởi ba đường thẳng, trong đó chỉ có một đường đi qua đỉnh của tam giác đó.

3.2. Cho tam giác đều ABC và điểm M bất kì nằm trong tam giác đó. Đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với BC tại điểm H. Đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với CA tại điểm K. Đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với AB tại điểm T.

Chứng minh rằng MH + MK + MT không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

3.3. a) Cho hai tam giác ABC và DBC. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Kẻ đường cao DK của tam giác DBC. Gọi S là diện tích của tam giác ABC. Gọi S' là diện tích của tam giác DBC.

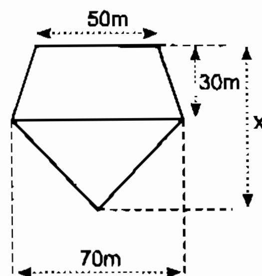
Chứng minh rằng $\frac{S'}{S} = \frac{DK}{AH}$.

b) Cho tam giác ABC và điểm M bất kì nằm trong tam giác đó. Kẻ các đường cao của tam giác đó là AD, BE và CF. Đường thẳng đi qua điểm M và song song với AD cắt cạnh BC tại điểm H. Đường thẳng đi qua điểm M và song song với BE cắt cạnh AC tại điểm K. Đường thẳng đi qua điểm M và song song với CF cắt cạnh BA tại điểm T.

Chứng minh rằng $\frac{MH}{AD} + \frac{MK}{BE} + \frac{MT}{CF} = 1$.

§4. Diện tích hình thang

32. Tính x, biết đa giác ở hình 188 có diện tích là $3375m^2$.



Hình 188

33. Cho hình chữ nhật ABCD có cạnh AB = 5cm, BC = 3cm. Vẽ hình bình hành ABEF có cạnh AB = 5cm và có diện tích bằng diện tích của hình chữ nhật ABCD. Vẽ được bao nhiêu hình ABEF như vậy ?

34. Cho hình chữ nhật ABCD có cạnh AB = 5cm, BC = 3cm. Vẽ hình bình hành ABEF có các cạnh AB = 5cm, BE = 5cm và có diện tích bằng diện tích của hình chữ nhật ABCD. Vẽ được mấy hình ABEF như vậy ?

35. Tính diện tích của một hình thang vuông, biết hai đáy có độ dài là 2cm và 4cm, góc tạo bởi một cạnh bên và đáy lớn có số đo bằng 45^o.

36. Tính diện tích hình thang, biết các đáy có độ dài là 7cm và 9cm, một trong các cạnh bên dài 8cm và tạo với đáy một góc có số đo bằng 30^o.

37. Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua trung điểm của đường trung bình của hình thang và cắt hai đáy hình thang sẽ chia hình thang đó thành hai hình thang có diện tích bằng nhau.

38. Diện tích hình bình hành bằng $24cm^2$. Khoảng cách từ giao điểm hai đường chéo đến các cạnh hình bình hành bằng 2cm và 3cm. Tính chu vi của hình bình hành đó.

39. Một hình chữ nhật có các kích thước a và b. Một hình bình hành cũng có hai cạnh là a và b. Tính góc nhọn của hình bình hành nếu diện tích của nó bằng một nửa diện tích của hình chữ nhật (a và b có cùng đơn vị đo).

40. Hai cạnh của một hình bình hành có độ dài là 6cm và 8cm. Một trong các đường cao có độ dài là 5cm. Tính độ dài đường cao thứ hai. Hỏi bài toán có mấy đáp số ?

41. Một hình chữ nhật và một hình bình hành đều có hai cạnh là a và b. Hỏi hình nào có diện tích lớn hơn (a và b có cùng đơn vị đo) ?

Bài tập bổ sung

4.1. Tính diện tích của hình được cho trong mỗi trường hợp sau :

a) Hình thang ABCD, đáy lớn AB = 10cm, đáy nhỏ CD = 6cm và đường cao DE = 5cm.

b) Hình thang cân ABCD, đáy nhỏ CD = 6cm, đường cao DH = 4cm và cạnh bên AD = 5cm.

4.2. Cho hình thang ABCD có đáy nhỏ CD và đáy lớn AB.

a) Hãy vẽ tam giác ADE mà diện tích của nó bằng diện tích hình thang đã cho. Từ đó suy ra cách tính diện tích hình thang dựa vào độ dài hai cạnh đáy và độ dài đường cao của hình thang.

b) Hãy chia hình thang đã cho thành hai phần có diện tích bằng nhau bằng một đường thẳng đi qua đỉnh D của nó.

4.3. Cho hình bình hành ABCD có diện tích S. Trên cạnh BC lấy hai điểm M, N sao cho $BM = MN = NC = \frac{1}{3}BC$.

a) Tính diện tích của tứ giác ABMD theo S.

b) Từ điểm N kẻ NT song song với AB (T thuộc AC). Tính diện tích của tứ giác ABNT theo S.

§5. Diện tích hình thoi

42. Trong những hình thoi có chu vi bằng nhau, hãy tìm hình thoi có diện tích lớn nhất.

43. Tính diện tích hình thoi, biết cạnh của nó dài 6,2cm và một trong các góc của nó có số đo là 30^{o}.

44. Cho hình thoi ABCD, biết AB = 5cm, AI = 3cm (I là giao điểm của hai đường chéo). Hãy tính diện tích hình thoi đó.

45. a) Hãy vẽ một tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau, biết độ dài hai đường chéo đó là a và $\frac{1}{2}$a. Hỏi có thể vẽ được bao nhiêu hình như vậy ?

b) Có thể vẽ được mấy hình thoi, biết độ dài hai đường chéo là a và $\frac{1}{2}$a ?

c) Hãy tính diện tích các hình vừa vẽ.

46. Hai đường chéo của một hình thoi có độ dài là 16cm và 12cm.

Tính : a) Diện tích hình thoi

b) Độ dài cạnh hình thoi

c) Độ dài đường cao hình thoi.

Bài tập bổ sung

5.1. a) Sử dụng kéo cắt đúng 2 lần, theo đường thẳng, chia một hình chữ nhật thành ba phần sao cho có thể ghép lại thành một hình thoi.

b) Sử dụng kéo cắt đúng 2 lần, theo đường thẳng, chia một hình thoi thành ba phần sao cho có thể ghép lại thành một hình chữ nhật.

Từ đó suy ra công thức tính diện tích hình thoi dựa vào công thức tính diện tích hình chữ nhật.

5.2. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Biết AC = 6cm, BD = 8cm. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Gọi X, Y, Z, T theo thứ tự là trung điểm của các cạnh MN, NP, PQ, QM.

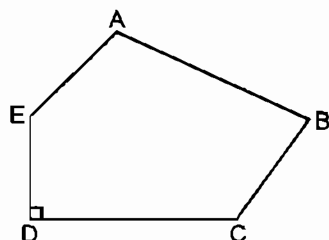
a) Chứng minh rằng MNPQ là hình chữ nhật.

b) Tính diện tích của tứ giác XYZT.

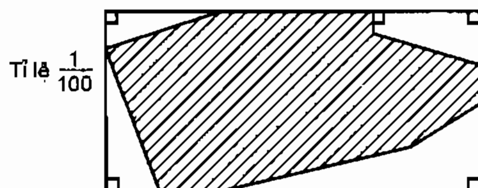
5.3. Cho tam giác vuông ABC, có hai cạnh góc vuông là AC = 6cm và AB = 8cm. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho CD = 5cm. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho EB = 5cm. Gọi M, N, P, Q tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng DE, DB, BC và CE. Tính diện tích của tứ giác MNPQ.

§6. Diện tích đa giác

47. Thực hiện các phép vẽ và đo cần thiết để tính diện tích đa giác ABCDE (BE // CD) (h.189).



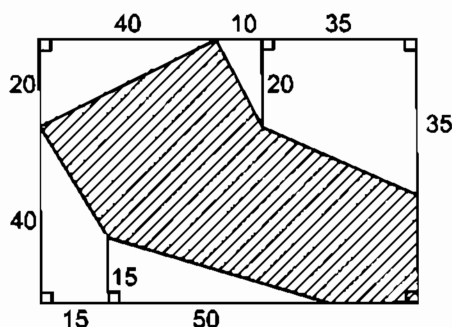
Hình 189



Hình 190

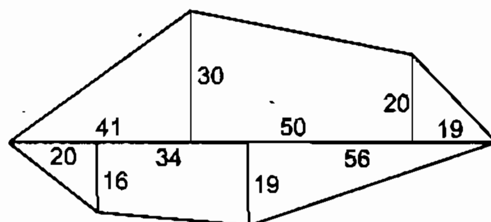
48. Theo bản đồ và tỉ lệ ghi trên hình 190, hãy tính diện tích của hồ nước (phần gạch sọc).

49. Theo kích thước đã cho trên hình 191, hãy tính diện tích hình gạch sọc (đơn vị m^2).



Hình 191

50. Tìm diện tích mảnh đất theo kích thước cho trên hình 192 (đơn vị m^2).



Hình 192

Bài tập bổ sung

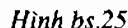
6.1. Tính diện tích của hình được cho trong mỗi trường hợp sau đây :

a) Đa giác ABCDEF, biết AD = 4cm, BC = 1cm, FE = 2cm, FB = 3cm, FB vuông góc với AD như hình bs.24.

b) Cho đa giác ABCD, CF và DE đều vuông góc với AB (như hình bs.25).

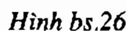
Biết AB = 13cm, CF = 8cm, DE = 4cm, FB = 6cm và AE = 3cm. Tính diện tích đa giác ABCD.


Hình bs.24


Hình bs.25

6.2 Cho hình bình hành ABCD, với diện tích S và AB = a, AD = b. Lấy mỗi cạnh của hình bình hành đó làm cạnh dựng một hình vuông ra phía ngoài hình bình hành. Tính theo a, b và S diện tích của đa giác giới hạn bởi các cạnh của hình vuông mà không là cạnh của hình bình hành đã cho.

6.3. Bạn Giang đã vẽ một đa giác ABCDEFGHI như ở hình bs.26.


Hình bs.26

Tính diện tích của đa giác đó, biết rằng : KH song song với BC (K thuộc EF) ; BC song song với GF ; CF song song với BG ; BG vuông góc với GF ; CK song song với DE ; CD song song với FE ; KE = DE và KE vuông góc với DE ; I là trung điểm của BH, AI = IH và AI vuông góc với IH ; HK = 11cm, CF = 6cm. HK cắt CF tại J và JK = 3 (cm), JF = 2cm. BG cắt HK tại M và HM = 2cm.

Bài tập ôn chương II

51. Cho tam giác ABC với ba đường cao AA', BB', CC'. Gọi H là trực tâm của tam giác đó.

Chứng minh rằng $$\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = 1.$$

52. Cho tam giác ABC.

a) Tính tỉ số các đường cao BB' và CC' xuất phát từ các đỉnh B và C.

b) Tại sao nếu AB < AC thì BB' < CC' ?

53. Qua tâm O của hình vuông ABCD cạnh a, kẻ đường thẳng l cắt cạnh AB và CD lần lượt tại M và N. Biết MN = b. Hãy tính tổng các khoảng cách từ các đỉnh của hình vuông đến đường thẳng l theo a và b (a và b có cùng đơn vị đo).

54. Tam giác ABC có hai trung tuyến AM và BN vuông góc với nhau. Hãy tính diện tích tam giác đó theo AM và BN.

55. Cho hình bình hành ABCD. Gọi K và L là hai điểm thuộc cạnh BC sao cho BK = KL = LC. Tính tỉ số diện tích của :

a) Các tam giác DAC và DCK ;

b) Tam giác DAC và tứ giác ADLB ;

c) Các tứ giác ABKD và ABLD.

56. Cho tam giác ABC vuông ở A và có BC = 2AB = 2a. Ở phía ngoài tam giác, ta vẽ hình vuông BCDE, tam giác đều ABF và tam giác đều ACG.

a) Tính các góc B, C, cạnh AC và diện tích tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng FA vuông góc với BE và CG. Tính diện tích các tam giác FAG và FBE.

c) Tính diện tích tứ giác DEFG.

Bài tập bổ sung

II.1. Cho hình bình hành ABCD, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Xét các tam giác có đỉnh lấy trong số các điểm A, B, C, D, O, hãy chỉ ra các tam giác có diện tích bằng nhau và giải thích vì sao.

II.2. Cho hình lục giác ABCDEF, có AB = BC = 3cm và ED = 4cm. Biết rằng ED song song với AB, AB vuông góc với BC, FE vuông góc với FA và FE = FA. Qua điểm A kẻ đường thẳng d song song với BC. Gọi K là giao điểm của d và ED, biết AK = 4cm, KD = 1cm. Tính diện tích của lục giác đó.

Mỗi bài từ số II.3 đến số II.11 sau đây đều có bốn phương án lựa chọn là (A), (B), (C) và (D) nhưng chỉ có một trong số đó là đúng. Hãy chỉ ra phương án mà em cho là đúng.

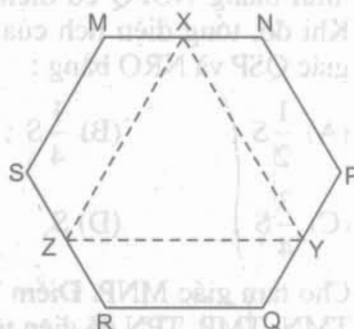
II.3. Cho lục giác đều MNPQRS (h.bs.27). Gọi X, Y, Z tương ứng là trung điểm các cạnh MN, PQ và RS. Khi đó XYZ là :

(A) tam giác vuông ;

(B) tam giác vuông cân ;

(C) tam giác đều ;

(D) tam giác mà độ dài các cạnh của nó đôi một khác nhau.



Hình bs.27

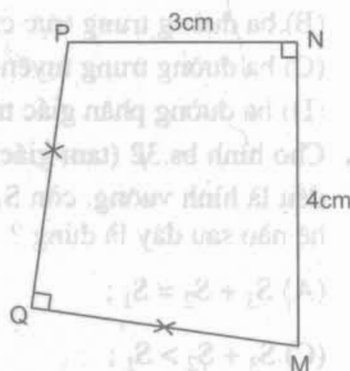
II.4. Cho tứ giác MNPQ và các kích thước đã cho trên hình bs.28. Diện tích tam giác MQP bằng bao nhiêu (cm^2) ?

(A) 6 ;

(B) 25 ;

(C) $\frac{25}{2}$;

(D) $\frac{25}{4}$.

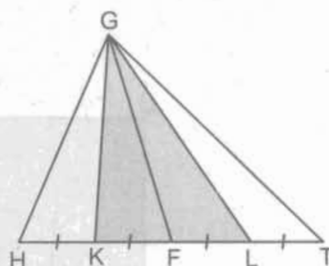


Hình bs.28

II.5. Cho hình bs.29, trong đó HK = KF = FL = LT và tam giác GHT có diện tích S. Khi đó, diện tích của tam giác GKL bằng :

(A) $\frac{1}{2}$S ; (B) $\frac{1}{4}$S ;

(C) $\frac{1}{8}$S ; (D) $\frac{3}{4}$S.

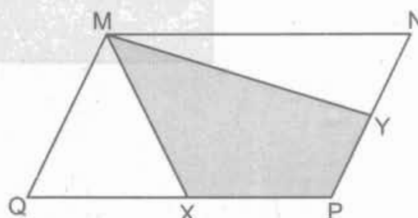


Hình bs.29

II.6. Cho hình bs.30 (hình bình hành MNPQ có diện tích S và X, Y tương ứng là trung điểm của các cạnh QP, PN). Khi đó, diện tích của tứ giác MXPY bằng :

(A) $\frac{1}{4}$S ; (B) $\frac{1}{2}$S ;

(C) $\frac{1}{8}$S ; (D) $\frac{3}{4}$S.

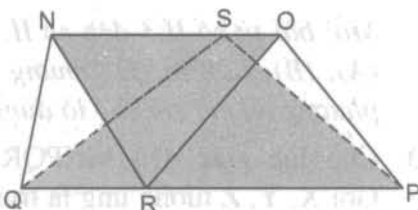


Hình bs.30

II.7. Cho hình bs.31, (R là điểm bất kì trên QP, S là điểm bất kì trên NO, hình thang NOPQ có diện tích S). Khi đó, tổng diện tích của hai tam giác QSP và NRO bằng :

(A) $\frac{1}{2}S$; (B) $\frac{1}{4}S$;

(C) $\frac{3}{4}S$; (D) S.



Hình bs.31

II.8. Cho tam giác MNP. Điểm T nằm trong tam giác MNP sao cho các tam giác TMN, TMP, TPN có diện tích bằng nhau. Khi đó, T là giao điểm

(A) ba đường cao của tam giác đó ;

(B) ba đường trung trực của tam giác đó ;

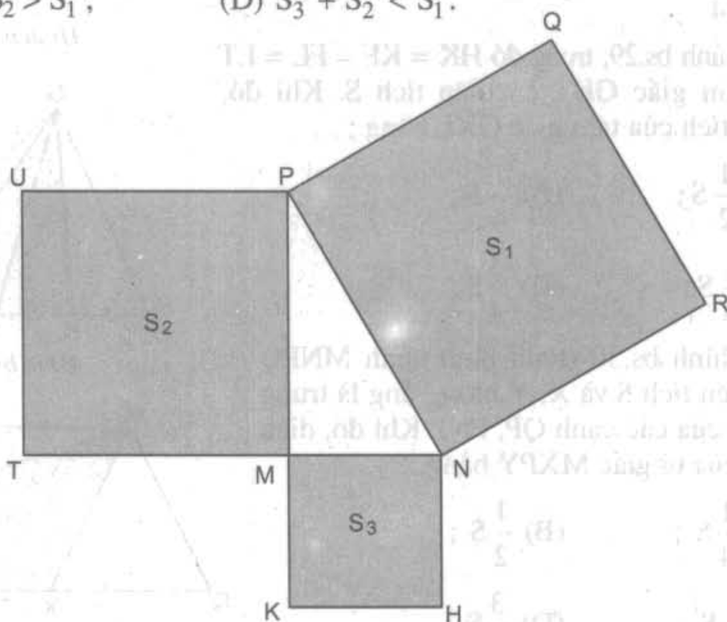
(C) ba đường trung tuyến của tam giác đó ;

(D) ba đường phân giác trong của tam giác đó.

II.9. Cho hình bs.32 (tam giác MNP vuông tại đỉnh M và NRQP, PUTM, MKHN đều là hình vuông, còn S_1, S_2, S_3 tương ứng là diện tích của mỗi hình). Quan hệ nào sau đây là đúng ?

(A) $S_3 + S_2 = S_1$; (B) $S_3^2 + S_2^2 = S_1^2$;

(C) $S_3 + S_2 > S_1$; (D) $S_3^2 + S_2^2 < S_1^2$.



Hình bs.32

II.10. Nếu độ dài cạnh của một hình vuông tăng gấp bốn lần thì diện tích hình vuông đó tăng lên bao nhiêu lần?

(A) 4 ; (B) 8 ; (C) 16 ; (D) Không tính được.

II.11. Nếu một hình chữ nhật có chu vi là 16 (cm) và diện tích là 12 (cm^2) thì độ dài hai cạnh của nó bằng bao nhiêu?

(A) 3 (cm) và 4 (cm) ; (B) 2 (cm) và 6 (cm) ;

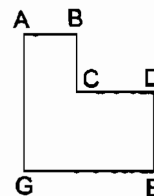
(C) 2 (cm) và 8 (cm) ; (D) Không tính được.

LỜI GIẢI - CHỈ DẪN - ĐÁP SỐ

§1. Đa giác. Đa giác đều

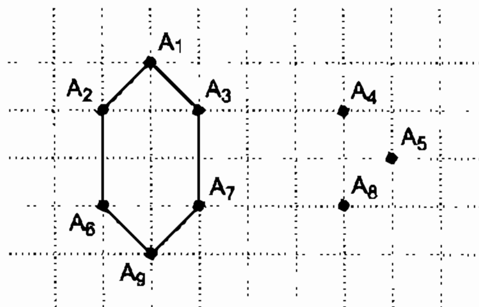
1. • Các hình c, e, g là đa giác lồi vì các cạnh của đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.

• Các hình a, b, d không phải là đa giác lồi vì các cạnh của đa giác nằm về hai phía của đường thẳng chứa một cạnh. Chẳng hạn đường thẳng BC hoặc CD trên hình 193.



Hình 193

2. Chẳng hạn $A_1A_2A_6A_9A_7A_3$ (h.194) là một đa giác lồi. Còn vẽ được nhiều đa giác lồi khác.



Hình 194

3. Tam giác đều, hình vuông, ngũ giác đều, lục giác đều, bát giác đều, hình 9 cạnh đều, hình 10 cạnh đều, hình 12 cạnh đều,...

4. Vẽ một n-giác lồi rồi vẽ các đường chéo xuất phát từ một đỉnh của n-giác lồi đó, ta được (n – 2) tam giác.

Tổng các góc của hình n-giác lồi bằng tổng các góc của (n – 2) tam giác, tức là có số đo bằng $(n-2).180^o$.

Hình n-giác đều có n góc bằng nhau nên mỗi góc có số đo là : $\dfrac{(n-2).180^o}{n}$.

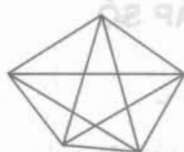
5. Áp dụng công thức tính số đo góc của hình n-giác đều là $\frac{(n-2).180^o}{n}$, ta có :

Số đo góc của hình 8 cạnh đều là : $\frac{(8-2).180^o}{8} = 135^o$.

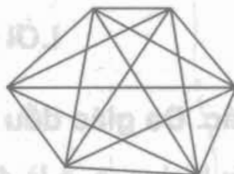
Số đo góc của hình 10 cạnh đều là : $\frac{(10-2).180^o}{10} = 144^o$.

Số đo góc của hình 12 cạnh đều là : $\frac{(12-2).180^o}{12} = 150^o$.

6. a) (h.195)



Ngũ giác có 5 đường chéo



Lục giác có 9 đường chéo

Hình 195

• Từ mỗi đỉnh của ngũ giác vẽ được hai đường chéo. Có năm đỉnh nên vẽ được 2 . 5 = 10 đường chéo, trong đó mỗi đường chéo được tính hai lần. Vậy ngũ giác có tất cả 5 đường chéo.

• Tương tự, lục giác có sáu đỉnh nên vẽ được 3 . 6 = 18 đường chéo, trong đó mỗi đường chéo được tính hai lần. Vậy lục giác có tất cả 9 đường chéo.

b) Từ mỗi đỉnh của hình n-giác (lồi) vẽ được (n – 1) đoạn thẳng nối đỉnh đó với (n – 1) đỉnh còn lại của đa giác, trong đó có 2 đoạn thẳng trùng với hai cạnh của đa giác. Vậy, qua mỗi đỉnh của hình n-giác (lồi) vẽ được (n – 3) đường chéo. Hình n-giác có n đỉnh nên vẽ được n(n – 3) đường chéo, trong đó mỗi đường chéo được tính hai lần. Vậy, hình n-giác có tất cả $\frac{n(n-3)}{2}$ đường chéo.

7. Áp dụng công thức tính số đường chéo của hình n-giác là $\frac{n(n-3)}{2}$, ta có :

Số đường chéo của hình 8 cạnh là : $\frac{8(8-3)}{2} = 20$ (đường chéo).

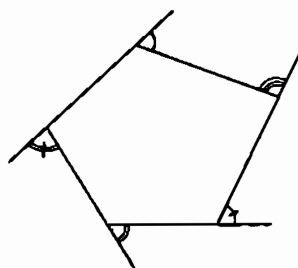
Số đường chéo của hình 10 cạnh là : $\frac{10(10-3)}{2} = 35$ (đường chéo).

Số đường chéo của hình 12 cạnh là : $\frac{12(12-3)}{2} = 54$ (đường chéo).

8. Tổng số đo của góc trong và góc ngoài ở mỗi đỉnh của hình n-giác (lồi) là 180^o.

Hình n-giác có n đỉnh nên tổng số đo các góc trong và các góc ngoài của đa giác là $n.180^o$. Mặt khác tổng số đo các góc trong là $(n-2).180^o$. Vậy tổng số đo các góc ngoài là

$$n.180^o - (n-2).180^o = 360^o.$$



Hình 196

9. Hình n-giác (lồi) có tổng số đo các góc trong bằng $(n-2).180^o$ và tổng số đo các góc ngoài bằng 360^o. Do đó, hình n-giác có tổng số đo các góc trong bằng tổng số đo các góc ngoài nếu $(n-2).180^o = 360^o$, suy ra $n = 4$. Vậy đa giác cần tìm là tứ giác (lồi).

10. Nếu một góc của đa giác (lồi) là nhọn thì góc ngoài tương ứng là tù. Nếu đa giác có quá ba góc ngoài tù thì tổng các góc ngoài của đa giác lớn hơn 360^o, mâu thuẫn với định lí đã chứng minh (tổng số đo các góc ngoài của một đa giác (lồi) là 360^o).

Vậy đa giác có nhiều nhất là ba góc nhọn.

11. Gọi n là số cạnh của đa giác đều cần tìm. Mỗi góc của đa giác đều có số đo $\frac{(n-2).180^o}{n}$. Tổng số đo của tất cả các góc ngoài của đa giác là 360^o. Do đó, theo đề bài ta có phương trình :

$$360 + \frac{(n-2).180}{n} = 468.$$

Suy ra $n = 5$. Vậy đa giác đều phải tìm có năm cạnh.

Bài tập bổ sung

1.1. *HD :* Trong bài chỉ có câu c) là đúng, các câu còn lại là sai.

1.2. *HD :* a), b) Dễ dàng chứng minh nhờ tính chất đường trung bình của tam giác.

c) Để chứng minh MNPQR là ngũ giác đều ta cần chứng minh hai điều : hình đó có tất cả các cạnh bằng nhau và có tất cả các góc bằng nhau.

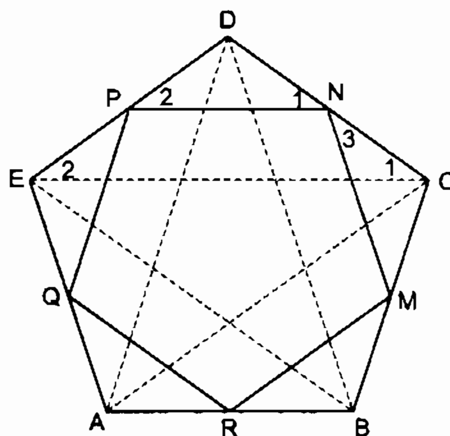
Để có được điều đó ta chứng minh mỗi cạnh của ngũ giác MNPQR bằng nhau và bằng nửa độ dài đường chéo của ngũ giác ABCDE, đồng thời tất cả các góc của ngũ giác MNPQR bằng nhau và cùng bằng 108^o (h.bs.33).

Trước hết, bằng cách chứng minh hai tam giác bằng nhau, suy ra được các đường chéo của ngũ giác ABCDE bằng nhau. Chẳng hạn, $\Delta DAE = \Delta DBC$ (c.g.c), suy ra DA = DB.

Khi đó dựa vào tính chất đường trung bình của tam giác suy ra được các cạnh của ngũ giác MNPQR bằng nhau (cùng bằng nửa độ dài đường chéo của ngũ giác ABCDE).

Có thể chứng minh được $\Delta DPN = \Delta CNM$ (c.g.c), suy ra góc DNP bằng góc CNM. Từ đó suy ra được $\widehat{PNM} = 108^o$.

Tương tự, chứng minh được các góc của ngũ giác MNPQR bằng nhau và cùng bằng 108^o.



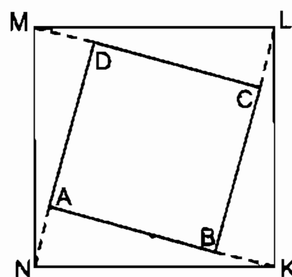
Hình bs.33

1.3. *HD :* Xem hình bs.34.

Dễ chứng minh được bốn tam giác vuông MCL, LBK, KAN, NDM bằng nhau (c.c).

Khi đó suy ra : ML = LK = KN = NM và ML vuông góc với LK, LK vuông góc với KN, KN vuông góc với NM.

Từ đó ta có KLMN là hình vuông.



Hình bs.34

§2. Diện tích hình chữ nhật

12. Theo công thức tính diện tích hình chữ nhật S = a.b thì diện tích hình chữ nhật tỉ lệ thuận với chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đó.

a) Nếu $a' = 3a$ và $b' = b$ thì $S' = a'.b' = 3a.b = 3S$. Vậy diện tích tăng 3 lần.

b) Nếu $b' = \frac{1}{2}b$ và $a' = a$ thì $S' = a'.b' = a.\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}S$. Vậy diện tích giảm 2 lần.

c) Nếu $a' = 4a$, $b' = 4b$ thì $S' = a'.b' = 4a.4b = 16ab = 16S$. Vậy diện tích tăng 16 lần.

d) Nếu $a' = 4a$, $b' = \frac{1}{3}b$ thì $S' = a'.b' = 4a . \frac{1}{3}b = \frac{4}{3}ab = \frac{4}{3}S$. Vậy diện tích bằng $\frac{4}{3}$ diện tích hình chữ nhật đã cho.

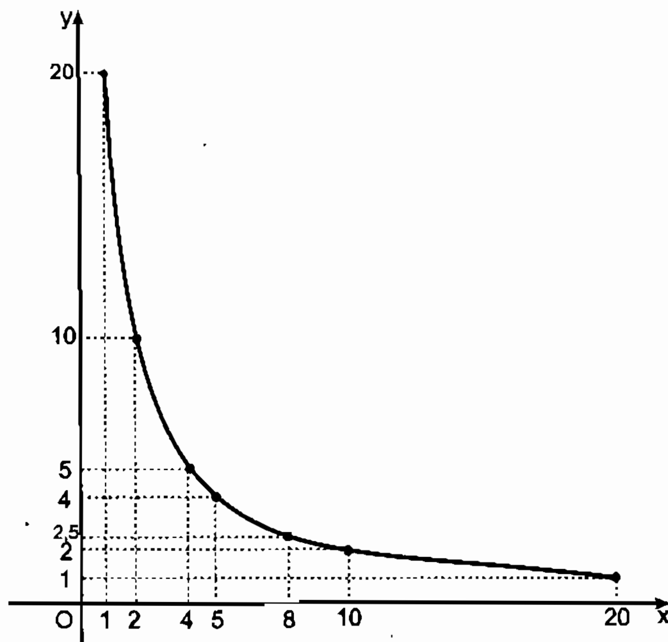
13. a)

x	1	2	4	5	8	10	20
y	20	10	5	4	2,5	2	1

Từ x . y = 20, suy ra $x = \frac{20}{y}$ và $y = \frac{20}{x}$.

Điều đó có nghĩa là, nếu một hình chữ nhật có diện tích không đổi thì chiều dài tỉ lệ nghịch với chiều rộng (hoặc chiều rộng tỉ lệ nghịch với chiều dài).

b) (h.197)



Hình 197

14. a) Gọi x và y là độ dài các cạnh của hình chữ nhật đã cho. Nếu mỗi cạnh cùng tăng 10% thì độ dài các cạnh hình chữ nhật sau khi tăng sẽ là $\frac{110}{100}x$ và $\frac{110}{100}y$. Phần diện tích được tăng lên sẽ là :

$$\frac{110}{100}x \cdot \frac{110}{100}y - xy = \frac{121}{100}xy - xy = \frac{21}{100}xy.$$

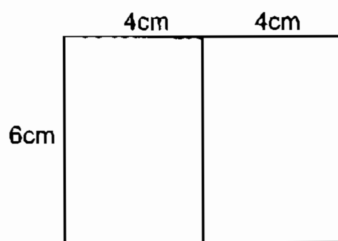
Vậy, diện tích hình chữ nhật tăng 21% so với diện tích hình chữ nhật ban đầu.

b) Nếu mỗi cạnh cùng giảm 10% thì độ dài các cạnh sau khi giảm sẽ bằng $\frac{90}{100}x$ và $\frac{90}{100}y$. Phần diện tích bị giảm đi là : $xy - \frac{81}{100}xy = \frac{19}{100}xy$. Vậy, diện tích hình chữ nhật giảm đi 19% so với diện tích hình chữ nhật ban đầu.

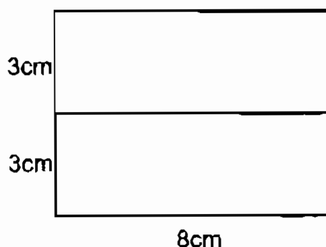
15. Hình chữ nhật có diện tích $48cm^2$, một cạnh dài 8cm thì cạnh kia sẽ là $48 : 8 = 6$(cm). Có hai cách vẽ đường thẳng song song với một trong các cạnh của hình chữ nhật để chia hình chữ nhật đó thành hai hình chữ nhật bằng nhau.

a) *Cách 1 :* (h.198). Chu vi mỗi hình chữ nhật nhỏ bằng : $(4 + 6) . 2 = 20$(cm).

b) *Cách 2 :* (h.199). Chu vi mỗi hình chữ nhật nhỏ bằng : $(8 + 3) . 2 = 22$(cm).



Hình 198



Hình 199

16. Gọi x, y ($x > 0, y > 0$) là hai kích thước của hình chữ nhật, theo đề toán ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 = 16 \\ xy = 28. \end{cases}$$

Giải ra, ta được $x = 4$(cm), $y = 7$(cm).

17. Gọi x, y ($x > 0, y > 0$) là hai kích thước của hình chữ nhật, theo đề toán ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{4}{9} \\ xy = 144. \end{cases}$$

Giải ra, ta được $x = 8$(cm), $y = 18$(cm).

18. Gọi x (x > 0) là cạnh của tam giác vuông cân, áp dụng định lí Py-ta-go, ta có :

$$x^2 + x^2 = l^2 \Rightarrow x = \frac{l\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{4}l^2.$$

19. a) Hình A có diện tích là 6 ô vuông (6 đơn vị diện tích).

Để dễ đếm số ô vuông chứa trong hình A, hãy cắt nó thành hai tam giác vuông bằng nhau rồi ghép lại thành một hình chữ nhật.

b) Hình B có diện tích là 6 ô vuông (6 đơn vị diện tích).

Hãy cắt ra một tam giác vuông rồi ghép lại để có một hình chữ nhật.

c) Hình C có diện tích là 6 ô vuông (6 đơn vị diện tích).

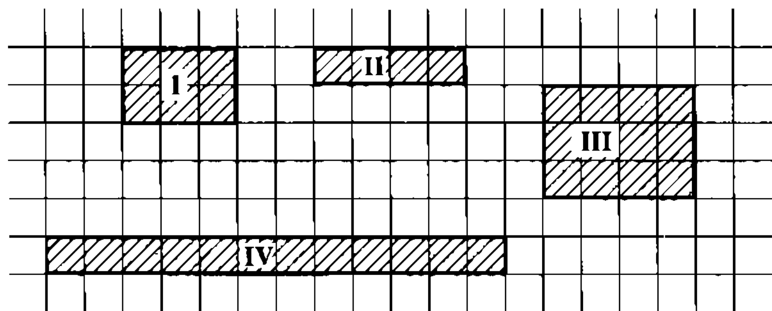
Hãy cắt ra một tam giác vuông cân (có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ ô vuông) rồi ghép lại để có một hình chữ nhật.

d) Hình D có diện tích là 23 ô vuông (23 đơn vị diện tích).

Hãy tính diện tích hình vuông "trùm" lên hình D rồi trừ đi diện tích khuyết ở bốn góc :

$$5 \,.\, 5 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 23 \text{ (ô vuông)}.$$

20. Có thể vẽ như hình 200.



Hình 200

a) Hai hình chữ nhật I và II có cùng chu vi (bằng 10 đơn vị dài) nhưng diện tích thì khác nhau (S_I = 6 đơn vị diện tích, S_{II} = 4 đơn vị diện tích).

b) Hai hình chữ nhật III và IV có cùng diện tích (bằng 12 đơn vị diện tích) nhưng có kích thước khác nhau. (Hai kích thước của hình III là 3 đơn vị dài và 4 đơn vị dài. Hai kích thước của hình IV là 12 đơn vị dài và 1 đơn vị dài).

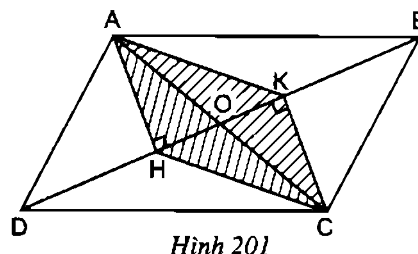
Còn nhiều cách vẽ khác.

21. (h.201). $S_{ABC} = S_{ADC}$,

$S_{AHC} = S_{AKC}$.

Suy ra : $S_{ABC} + S_{AHC} = S_{ADC} + S_{AKC}$

hay $S_{ABCH} = S_{ADCK}$.



Hình 201

22. (h.202).

a) $\Delta ABE = \Delta CDF$ (g.c.g).

Vậy $S_{ABE} = S_{CDF}$. (1)

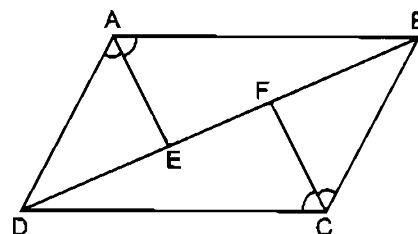
$\Delta BCF = \Delta DAE$ (g.c.g).

Vậy $S_{BCF} = S_{DAE}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra :

$S_{ABE} + S_{BCF} = S_{CDF} + S_{DAE}$

hay $S_{ABCFE} = S_{ADCFE}$.



Hình 202

b) Hình ABCFE không phải là đa giác lồi vì nó nằm về hai phía đường thẳng EF (hoặc đường thẳng CF).

Tương tự, hình ADCFE không phải là đa giác lồi.

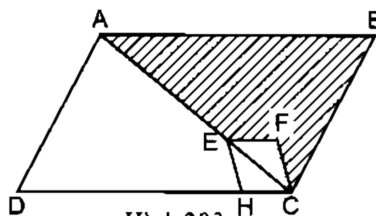
23. (h.203).

a) $S_{ABC} = S_{ADC}$ và

$S_{EFC} = S_{EHC}$.

Suy ra : $S_{ABC} - S_{EFC} = S_{ADC} - S_{EHC}$

hay $S_{ABCFE} = S_{AEHD}$.



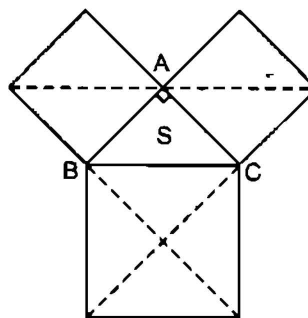
Hình 203

b) ABCFE không phải là đa giác lồi vì toàn bộ đa giác không nằm về cùng một phía đối với đường thẳng EF (hoặc đường thẳng CF).

24. Gọi S là diện tích của tam giác vuông cân ABC (h.204).

Hình vuông cạnh AB có thể chia thành hai tam giác vuông cân bằng tam giác ABC nên diện tích hình vuông cạnh AB bằng 2S. Tương tự, ta cũng có diện tích hình vuông cạnh AC bằng 2S.

Hình vuông cạnh BC có thể chia thành bốn hình tam giác vuông cân, mỗi tam giác này bằng tam giác ABC. Do đó diện tích hình vuông cạnh BC bằng 4S.



Hình 204

Do 4S = 2S + 2S nên diện tích hình vuông dựng trên cạnh huyền của một tam giác vuông cân bằng tổng diện tích hai hình vuông dựng trên hai cạnh góc vuông.

Bài tập này là một minh hoạ của định lí Py-ta-go bằng diện tích.

Bài tập bổ sung

2.1. *HD :* a) Ta tính được diện tích của nền nhà đó là : $4.6 = 24$ (m^2).

Khi đó cần $24 : (0,3333)^2 \approx 216$ viên gạch để lát kín nền nhà đó.

Chú ý : Với gạch lát có hình vuông mà cạnh là 33,33cm thì để lát kín $1m^2$ cần 9 viên.

Như vậy, cần $24.9 = 216$ viên để lát kín nền nhà đó.

b) Ta tính được diện tích của mảnh sân đó là : $12 + 6 + 24 = 42$ (m^2).

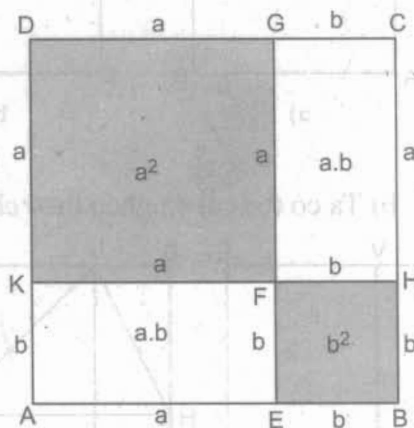
Với gạch lát có hình vuông mà cạnh là 25,0cm thì để lát kín $1m^2$ cần 16 viên.

Như vậy, cần $42.16 = 672$ viên gạch để lát kín mảnh sân đó.

2.2. *HD :* a) Dựng hình vuông ABCD có cạnh là (a + b). Trên cạnh AB dựng điểm E sao cho AE = a và EB = b. Trên cạnh DC dựng điểm G sao cho DG = a và GC = b. Trên cạnh AD dựng điểm K sao cho AK = b và KD = a, trên cạnh BC dựng điểm H sao cho CH = a và HB = b, như hình bs.35.

Khi đó, diện tích của hình vuông ABCD là $(a + b)^2$, diện tích của hình vuông EBHF là b^2, diện tích của hình vuông KFGD là a^2, diện tích của hình chữ nhật AEFK là a.b, diện tích của hình chữ nhật FHCG cũng là a.b.

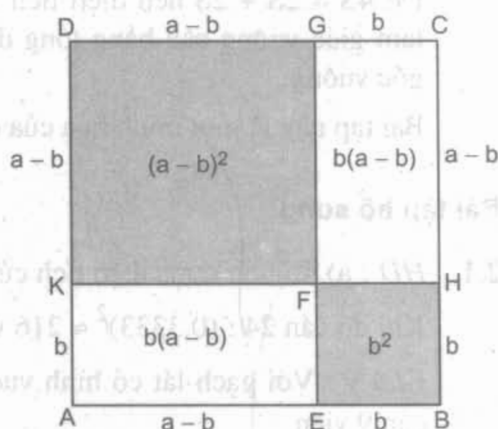
Vì tổng diện tích của các hình AEFK, EBHF, FHCG, GDKF bằng diện tích của hình ABCD nên ta có $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.



Hình bs.35

b) Dựng hình vuông ABCD có cạnh là a, trên cạnh AB dựng điểm E sao cho AE = (a – b) và EB = b, trên cạnh DC dựng điểm G sao cho DG = (a – b) và GC = b, trên cạnh AD dựng điểm K sao cho AK = b và KD = (a – b), trên cạnh BC dựng điểm H sao cho CH = (a – b) và HB = b, như hình vẽ bs.36.

Khi đó, diện tích của hình vuông ABCD là a^2, diện tích của hình vuông EBHF là b^2, diện tích của hình vuông KFGD là $(a - b)^2$, diện tích của hình chữ nhật AEFK là $b(a - b)$, diện tích của hình chữ nhật FHCG cũng là $b(a - b)$.

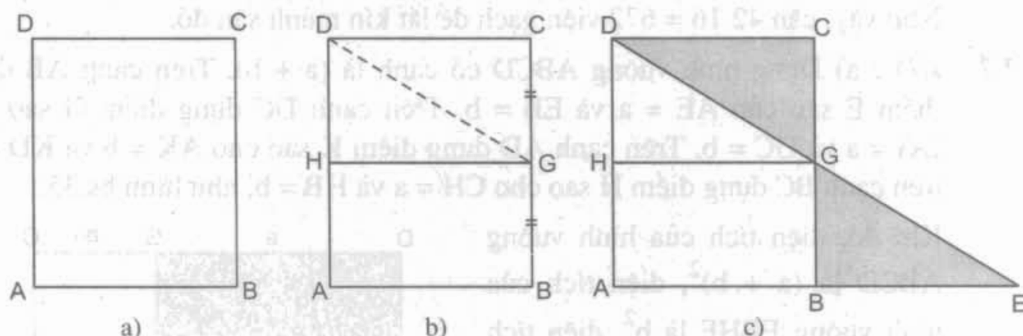


Hình bs.36

Vì tổng diện tích của các hình AEFK, EBHF, FHCG, GDKF bằng diện tích của hình ABCD, tức là ta có $(a - b)^2 + 2b(a - b) + b^2 = a^2$.

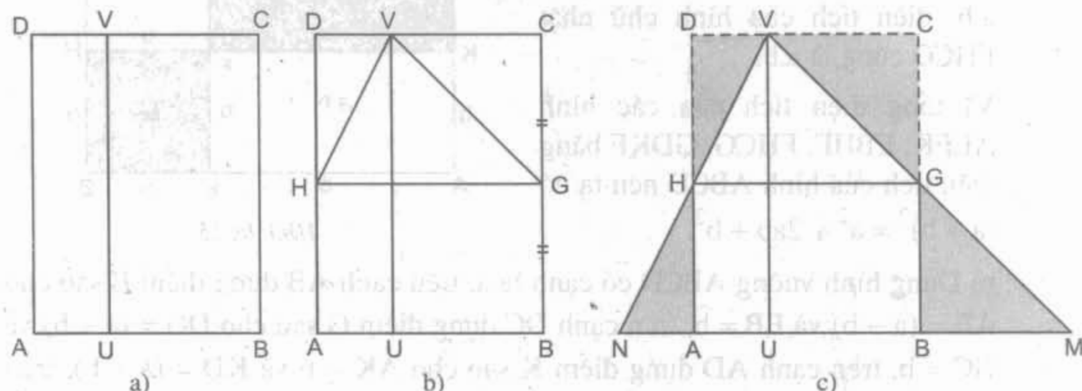
Từ đó suy ra $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

2.3. *HD :* a) Ta có thể cắt và ghép theo chỉ dẫn ở hình bs.37 như sau :



Hình bs.37

b) Ta có thể cắt và ghép theo chỉ dẫn ở hình bs.38 như sau :



Hình bs.38

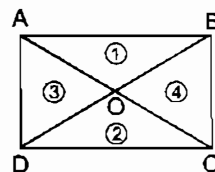
§3. Diện tích tam giác

25. (h.205). $\Delta AOB = \Delta COD \Rightarrow S_{(1)} = S_{(2)}$.

$\Delta AOD = \Delta BOC \Rightarrow S_{(3)} = S_{(4)}$.

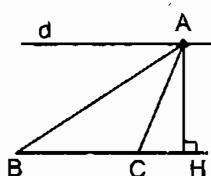
Mà $S_{(1)} = S_{(4)}$ vì hai tam giác AOB và COB có đáy AO = OC và đỉnh B chung.

Vậy $S_{(1)} = S_{(2)} = S_{(3)} = S_{(4)}$.

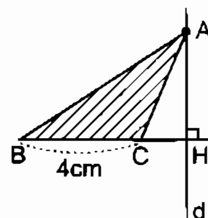


Hình 205

26. Tam giác ABC luôn có đáy và chiều cao không đổi (h.206).



Hình 206



Hình 207

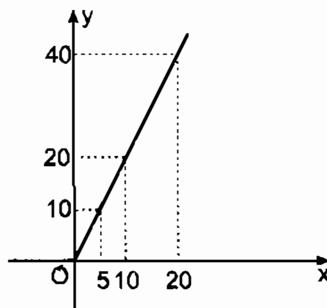
27. a) (h.207).

Độ dài AH(cm)	1	2	3	4	5	10	15	20
$S_{ABC}(cm^2)$	2	4	6	8	10	20	30	40

b) S_{ABC} là một hàm số của chiều cao AH. Gọi y là diện tích ΔABC (cm^2) và x là độ dài AH (cm) thì $y = 2x$.

Ta có đồ thị như trên hình 208.

c) Diện tích ΔABC tỉ lệ thuận với chiều cao AH.



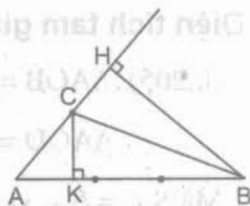
Hình 208

28. $S = bc + \frac{c}{2}(a - b)$.

29. Giả sử hai cạnh của tam giác lần lượt có độ dài 5cm và 6cm. Khi đó diện tích của tam giác tính theo công thức $S = \frac{1}{2} \cdot 5h$ hay $S = \frac{1}{2} \cdot 6k$, với h và k là chiều cao tương ứng với cạnh 5cm, 6cm. Nhưng theo tính chất của đường vuông góc và đường xiên thì $h \leq 6$ và $k \leq 5$. Từ đó $S \leq 15$.

Vậy S có thể bằng $10cm^2$ hay $15cm^2$ nhưng không thể bằng $20cm^2$.

30. Ta có : $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.CK = \frac{1}{2}AC.BH.$



Hình 209

Suy ra : AB.CK = AC.BH

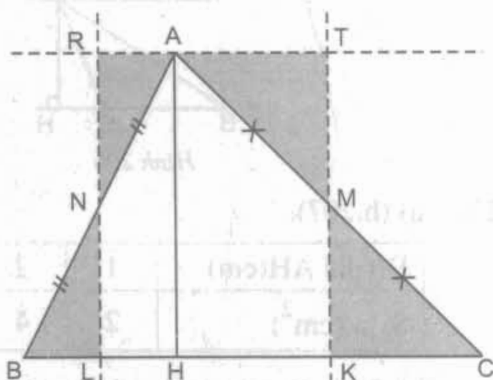
hay $\frac{BH}{CK} = \frac{AB}{AC} = 3.$

Vậy đường cao BH dài gấp ba lần đường cao CK.

31. *HD*. Biết diện tích hai tam giác vuông EBH và NDK thì tính được diện tích còn lại. Diện tích còn lại được chia thành năm phần bằng nhau, từ đó diện tích của ngũ giác là một phần rưỡi và diện tích của tứ giác là hai phần.

Bài tập bổ sung

3.1. *HD :* a) Giả sử ta có tam giác ABC. Kẻ đường cao AH, dựng trung điểm M của cạnh AC, dựng trung điểm N của cạnh AB. Qua điểm M dựng đường thẳng MK song song với AH, qua điểm N dựng đường thẳng NL song song với AH, qua điểm A dựng đường thẳng RT song song với BC như hình bs.39.



Hình bs.39

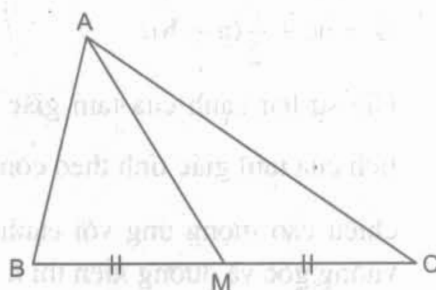
Khi đó, ta có các cặp tam giác vuông sau bằng nhau :

ΔMKC = ΔMTA, ΔNLB = ΔNRA.

Như vậy ta đã cắt theo đường thẳng và chia tam giác ABC thành ba mảnh mà sau khi ghép lại được hình chữ nhật LKTR.

Như thế diện tích của tam giác ABC bằng diện tích của hình chữ nhật LKTR. Do $LK = \frac{1}{2}BC$, suy ra được $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC.$

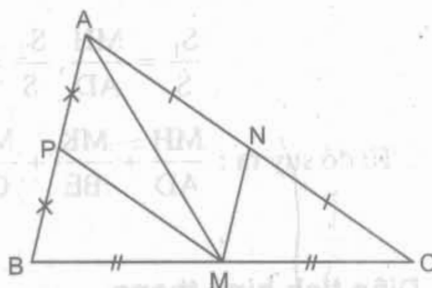
b) Giả sử có tam giác ABC (h.bs.40). Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó cắt theo đường thẳng AM sẽ chia tam giác đã cho thành hai phần có diện tích bằng nhau.



Hình bs.40

c) Giả sử có tam giác ABC (h.bs.41). Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm của các cạnh BC, CA,

AB. Khi đó, cắt theo đường thẳng AM ta chia được tam giác thành hai phần bằng nhau. Sau đó cắt theo đường thẳng MN ta chia được tam giác AMC thành hai phần bằng nhau, cuối cùng cắt theo đường thẳng MP ta chia được tam giác AMB thành hai phần bằng nhau. Tức là ta đã chia tam giác đã cho thành bốn phần có diện tích bằng nhau.



Hình bs.41

3.2. *HD :* Giả sử có tam giác đều ABC. Kẻ đường cao AD (h.bs.42). Vì tam giác cho trước nên độ dài các cạnh và độ dài đường cao là không đổi. Giả sử BC = CA = AB = a và AD = h.

Vì tổng diện tích của các tam giác MBC, MCA, MAB bằng diện tích tam giác ABC suy ra :

Hình bs.42

$$\frac{1}{2}MH.BC + \frac{1}{2}MK.CA + \frac{1}{2}MT.AB = \frac{1}{2}AD.BC.$$

Từ đó có $\frac{1}{2}MH.a + \frac{1}{2}MK.a + \frac{1}{2}MT.a = \frac{1}{2}h.a$,

hay ta có : MH + MK + MT = h (không đổi).

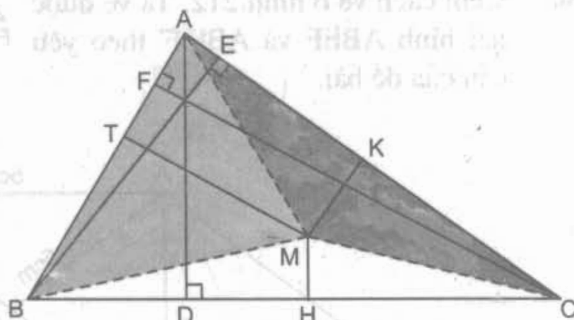
3.3. *HD :* a) Ta có $S = \frac{1}{2}AH.BC$

và $S' = \frac{1}{2}DK.BC$.

Từ đó suy ra

$$\frac{S'}{S} = \frac{\frac{1}{2}DK.BC}{\frac{1}{2}AH.BC} = \frac{DK}{AH}.$$

b) Xem hình bs.43.



Hình bs.43

Gọi S, S_1, S_2, S_3 tương ứng là diện tích của các tam giác ABC, MBC, MCA, MAB ta có $S = S_1 + S_2 + S_3$.

Theo câu a) ở trên, ta có

$$\frac{S_1}{S} = \frac{MH}{AD}, \frac{S_2}{S} = \frac{MK}{BE}, \frac{S_3}{S} = \frac{MT}{CF}.$$

Từ đó suy ra : $\frac{MH}{AD} + \frac{MK}{BE} + \frac{MT}{CF} = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} = 1.$

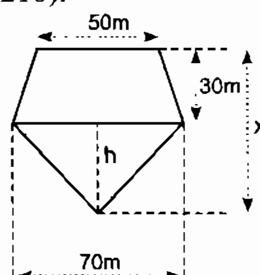
§4. Diện tích hình thang

32. Đa giác đã cho gồm một hình thang và một tam giác (h.210).

$$S_{\text{hình thang}} = \frac{50 + 70}{2} \cdot 30 = 1800(m^2),$$

$$S_{\text{tam giác}} = 3375 - 1800 = 1575(m^2),$$

$$h = \frac{2.1575}{70} = 45(m),\ x = 45 + 30 = 75(m).$$



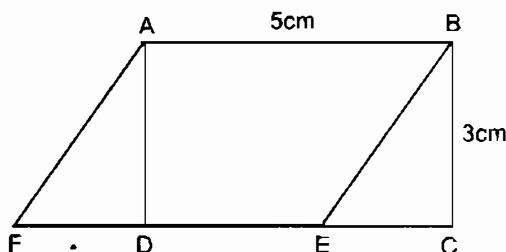
Hình 210

Cách giải gộp : Gọi S là diện tích đa giác đã cho, ta có :

$$S = \frac{70 + 50}{2} . 30 + \frac{1}{2}(x - 30) . 70 = 3375(m^2).$$

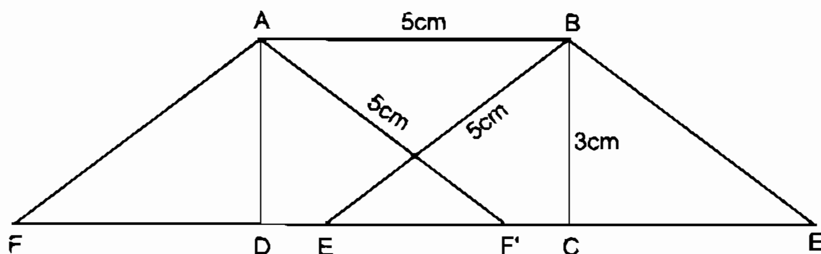
Từ đó suy ra x = 75(m).

33. Xem cách vẽ ở hình 211. Ta vẽ được vô số hình bình hành ABEF như vậy.



Hình 211

34. Xem cách vẽ ở hình 212. Ta vẽ được hai hình ABEF và ABE'F' theo yêu cầu của đề bài.



Hình 212

35. (h.213).

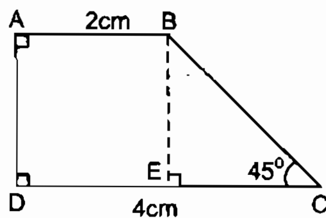
Giả sử ABCD là hình thang vuông có

$\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$ và $\widehat{BCD} = 45^o$.

Vẽ BE ⊥ DC, ta có :

BE = EC = 2(cm). Vậy

$S_{ABCD} = 6(cm^2)$.

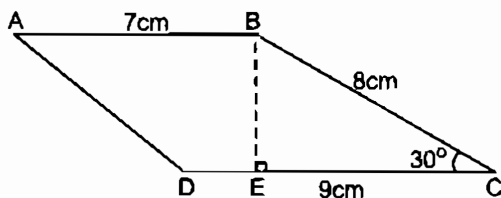


Hình 213

36. (h.214). Giả sử hình thang ABCD có AB = 7cm, BC = 8cm, CD = 9cm và $\widehat{BCD} = 30^o$. Vẽ BE ⊥ CD.

Tam giác vuông BEC là nửa tam giác đều, suy ra

$$BE = \frac{BC}{2} = 4cm.$$



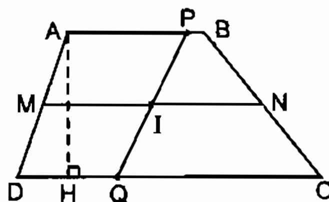
Hình 214

Diện tích hình thang ABCD là :

$$\frac{7+9}{2} \cdot 4 = 32(cm^2).$$

37. Giả sử ABCD là hình thang, MN là đường trung bình, I là trung điểm của MN. Đường thẳng bất kì qua I lần lượt cắt hai đáy AB và CD tại P và Q (h.215).

Do MI = IN và đường cao AH chung nên $S_{APQD} = S_{PBCQ}$. (Diện tích hình thang bằng tích đường trung bình của hình thang với đường cao của nó).



Hình 215

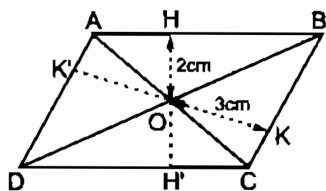
38. Giả sử O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành ABCD có diện tích $24cm^2$, OH = 2cm, OK = 3cm (h.216). Suy ra :

Độ dài cạnh AB là $\frac{24}{2+2} = 6(cm)$,

độ dài cạnh BC là $\frac{24}{3+3} = 4(cm)$

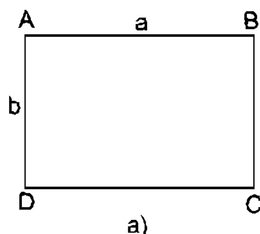
và chu vi hình bình hành ABCD là

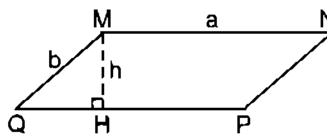
$$(6+4) \,.\, 2 = 20(cm).$$



Hình 216

39. Gọi a và b là độ dài các cạnh của hình chữ nhật ABCD và của hình bình hành MNPQ (h.217). Ta có : $S_{ABCD} = a . b$





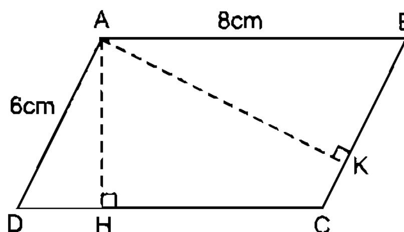
Hình 217

$S_{MNPQ} = a . h$ (h là độ dài đường cao MH).

Theo đề bài thì $ah = \frac{ab}{2}$, suy ra $h = \frac{b}{2}$.

Tam giác vuông MHQ có cạnh góc vuông MH bằng nửa cạnh huyền MQ nên $\widehat{MQH} = 30^o$. Vậy góc nhọn của hình bình hành có số đo bằng 30^o.

40. Giả sử ABCD là hình bình hành có AB = 8cm, AD = 6cm và có một đường cao dài 5cm (h.218).



Hình 218

Vì 5 < 8 và 5 < 6 nên có thể xảy ra hai trường hợp :

• AH = 5cm. Khi đó

$S = AB . AH = BC . AK$

tức là : $8 . 5 = 6.AK$

hay $AK = \frac{20}{3}$(cm).

• AK = 5cm. Khi đó $S = AB . AH = BC . AK$

tức là : $8 . AH = 6 . 5$

hay $AH = \frac{15}{4}$(cm).

Vậy bài toán có hai đáp số. Đường cao thứ hai có độ dài là $\frac{20}{3}$cm hoặc $\frac{15}{4}$cm.

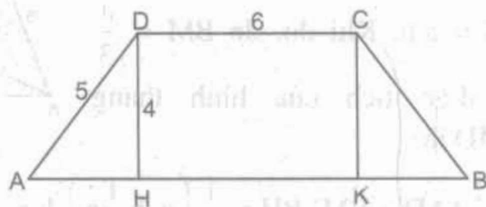
41. Hình chữ nhật có hai cạnh là a và b thì có diện tích $S_{\text{chữ nhật}} = a . b$.

Hình bình hành có hai cạnh là a và b thì có diện tích $S_{\text{bình hành}} = a . h$ (với h là đường cao). Nhưng đường vuông góc phải ngắn hơn đường xiên nên $h < a$ và $h < b$. Vậy $S_{\text{bình hành}} < S_{\text{chữ nhật}}$.

Bài tập bổ sung

4.1. *HD :* a) Học sinh tính theo công thức, được $S = 40\ (cm^2)$.

b) Xem hình bs.44. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm D và vuông góc với AB tại H. Gọi d' là đường thẳng đi qua điểm C và vuông góc với AB tại K. Khi đó

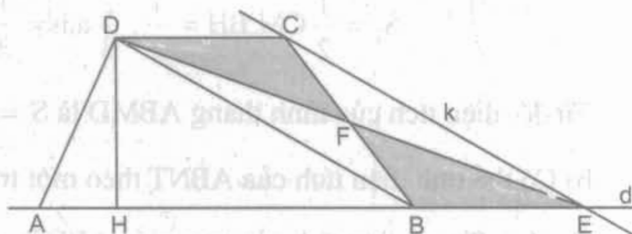


Hình bs.44

DH = 4cm, HK = 6cm. Trong tam giác vuông AHD tính được AH = 3cm. Từ đó tính được AB = 12cm. Lúc này diện tích hình thang tính được là $S = 36cm^2$.

4.2. *HD :* a) Xem hình bs.45.

Nối DB. Từ điểm C kẻ đường thẳng k song song với DB. Gọi E là giao điểm của đường thẳng k với đường thẳng AB. Khi đó, hai tam giác EDB và CDB



Hình bs.45

có diện tích bằng nhau và có chung phần diện tích tam giác FDB. Từ đó, suy ra hai tam giác CDF và EBF có diện tích bằng nhau.

Vậy diện tích tam giác ADE bằng diện tích hình thang ABCD.

Giả sử AB = a và CD = b và DH = h.

Theo cách dựng trên thì DCEB là hình bình hành, nên CD = BE.

Từ đó AE = AB + BE = a + b.

Diện tích của tam giác ADE là $S = \frac{1}{2}DH.AE = \frac{1}{2}h.(a + b)$.

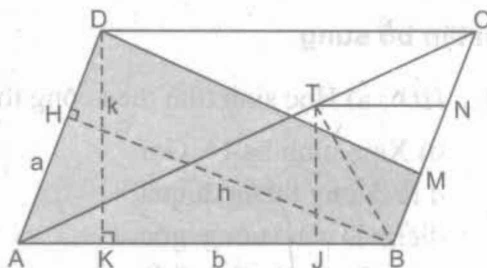
Vậy diện tích của hình thang ABCD là $S = \frac{1}{2}h.(a + b)$.

b) Từ kết quả câu a) ta chỉ việc cắt hình thang ABCD theo đường thẳng DM, trong đó M là trung điểm của đoạn thẳng AE.

4.3. *HD :* a) Xem hình bs.46.

Có thể tính diện tích của ABMD theo một trong các cách sau đây :

Cách 1. Ta có ABMD là hình thang. Giả sử AD = a, một đường cao của hình bình hành là BH = h thì S = a.h. Khi đó, do BM = $\frac{a}{3}$ nên diện tích của hình thang ABMD là



Hình bs.46

$$S' = \frac{1}{2}(AD + BM).BH = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{3}a\right).h = \frac{2}{3}a.h = \frac{2}{3}S.$$

Cách 2. Diện tích của hình ABMD bằng diện tích hình bình hành ABCD trừ đi diện tích của tam giác DMC.

Theo giả thiết, ta tính được diện tích của tam giác DMC là

$$S_1 = \frac{1}{2}CM.BH = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}a.h = \frac{1}{3}S.$$

Từ đó, diện tích của hình thang ABMD là $S' = S - S_1 = S - \frac{1}{3}S = \frac{2}{3}S.$

b) Có thể tính diện tích của ABNT theo một trong các cách sau đây :

Cách 1. Ta có diện tích của tam giác ABC là $\frac{1}{2}S.$

Theo giả thiết ta có $CT = \frac{1}{3}CA$, suy ra diện tích của tam giác BTC bằng $\frac{1}{3}$ diện tích của tam giác ABC, tức là bằng $\frac{1}{6}S.$

Theo giả thiết ta có $CN = \frac{1}{3}CB$, suy ra diện tích của tam giác NTC bằng $\frac{1}{3}$ diện tích của tam giác TBC.

Do đó, diện tích của tam giác NTC bằng $\frac{1}{18}S.$

Suy ra, diện tích của hình thang ABNT là $S'' = \frac{1}{2}S - \frac{1}{18}S = \frac{4}{9}S.$

Cách 2. Gọi DK = k, AB = b.

Ta có $NT = \frac{1}{3}AB$ và $TJ = \frac{2}{3}DK.$

Từ đó, diện tích của hình thang ABNT là

$$S'' = \frac{1}{2}(AB + TN).TJ = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{3}b\right).\frac{2}{3}.k = \frac{4}{9}b.k = \frac{4}{9}S.$$

§5. Diện tích hình thoi

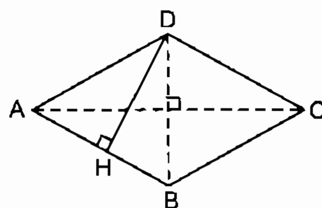
42. (h.219). $S_{ABCD} = AB \cdot DH$.

Trong tam giác vuông ADH thì

$DH \le AD$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên)

nên $S_{ABCD} \le AB \cdot AD$, nhưng $AD = AB$.

Vậy $S_{ABCD} \le AB^2$.



Hình 219

S_{ABCD} có giá trị lớn nhất bằng AB^2 khi ABCD là hình vuông.

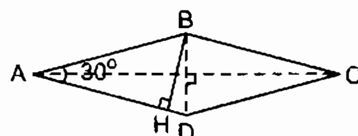
Vậy trong các hình thoi có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

43. (h.220).

Cho hình thoi ABCD có $AD = 6{,}2$(cm) và $\widehat{A} = 30^o$. Từ B vẽ $BH \perp AD$.

Tam giác vuông AHB là nửa tam giác đều, suy ra $BH = \dfrac{AB}{2} = 3{,}1$(cm).

$S_{ABCD} = BH \cdot AD = 3{,}1 \cdot 6{,}2 = 19{,}22(cm^2)$.



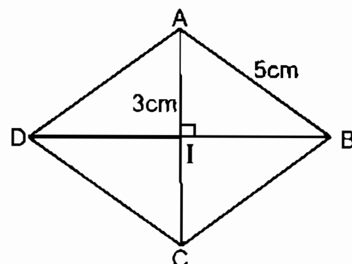
Hình 220

44. (h.221).

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông AIB, ta có :

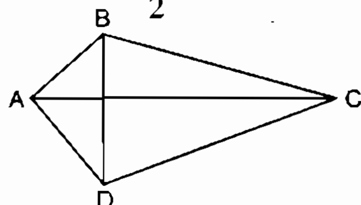
$$IB = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4cm.$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{1}{2}.6.8 = 24(cm^2).$$

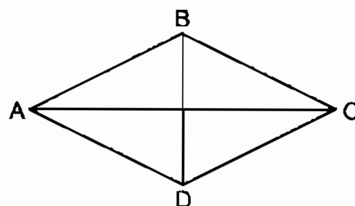


Hình 221

45. a) (h.222). Vẽ được vô số tứ giác có hai đường chéo vuông góc (độ dài hai đường chéo là a và $\frac{1}{2}$a).



Hình 222



Hình 223

b) (h.223). Chỉ vẽ được một hình thoi, biết độ dài hai đường chéo là a và $\frac{1}{2}$a.

c) $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{1}{2}.\ a\ .\dfrac{1}{2}a = \dfrac{1}{4}a^2$ (đơn vị diện tích).

46. (h.224).

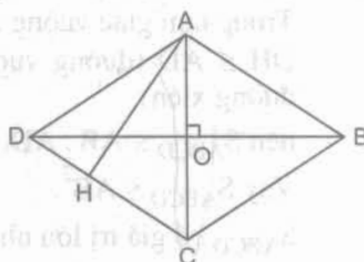
a) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{1}{2}.12.16 = 96(cm^2)$.

b) Trong tam giác vuông AOB ta có :

$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10(cm)$.

c) Giả sử AH là đường cao hình thoi kẻ từ đỉnh A, ta có $S_{ABCD} = AH.CD$,

do đó : $AH = \frac{S_{ABCD}}{CD} = \frac{96}{10} = 9,6(cm)$.

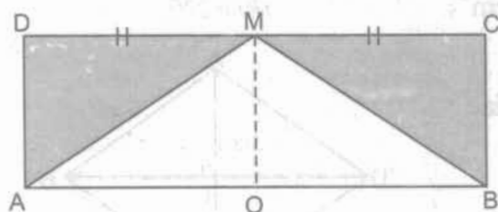


Hình 224

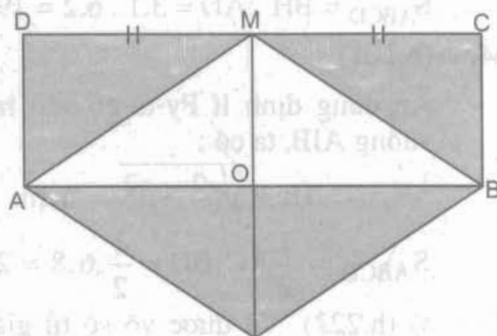
Bài tập bổ sung

5.1. *HD :* (h.bs.47)

a) Giả sử có hình chữ nhật ABCD. Lấy điểm M là trung điểm của cạnh CD.



a)



b)

Hình bs.47

Cắt theo cạnh AM và MB. Sau đó chuyển tam giác ADM đến vị trí của tam giác NOA, chuyển tam giác MBC đến vị trí của tam giác BNO.

Khi đó diện tích của hình thoi ANBM bằng diện tích của hình chữ nhật ABCD.

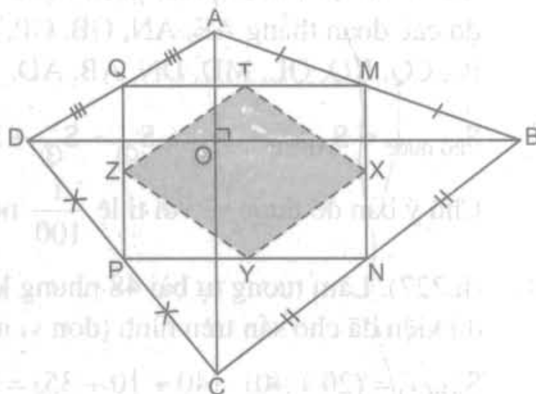
b) Ta chỉ cần thao tác ngược lại, chẳng hạn : cắt theo AB, cắt theo NO khi đó chia được hình thoi thành ba phần là tam giác AMB, tam giác NOA và tam giác NOB, sau đó ghép lại sẽ được hình chữ nhật ABCD.

Từ đó suy ra : Diện tích hình thoi có số đo bằng một nửa tích của độ dài hai đường chéo của nó.

5.2. *HD* : Xem hình bs.48.

a) Sử dụng tính chất đường trung bình của tam giác chứng minh được MNPQ là hình bình hành. Hơn nữa, AC vuông góc với BD nên MNPQ là hình chữ nhật.

b) Khi MNPQ là hình chữ nhật và X, Y, Z, T theo thứ tự là trung điểm của các cạnh MN, NP, PQ, QM có thể chứng minh được XYZT là hình thoi. Hơn nữa, diện tích hình chữ nhật MNPQ gấp đôi diện tích hình thoi XYZT. Từ đó, diện tích hình thoi XYZT là $S = \frac{1}{2}.3.4 = 6cm^2$.

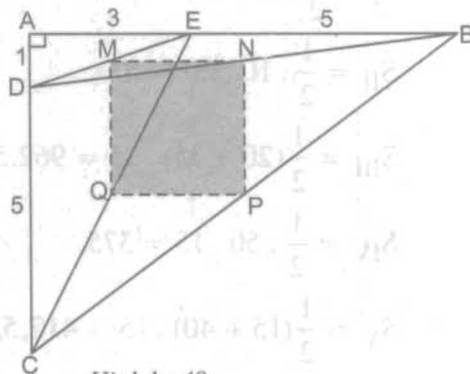


Hình bs.48

5.3. *HD* : Xem hình bs.49.

Vì M, N, P, Q tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng DE, DB, BC và CE, hơn nữa CD = EB, nên suy ra MNPQ là hình thoi.

Thêm vào đó AC vuông góc với AB nên MNPQ là hình vuông.



Hình bs.49

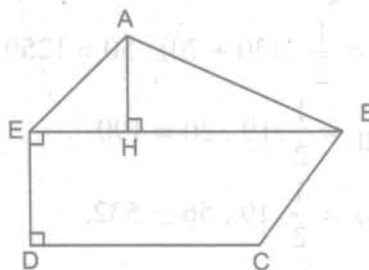
Từ đó, ta tính được diện tích hình vuông MNPQ là $S = \frac{25}{4}cm^2$.

§6. Diện tích đa giác

47. (h.225). Chia đa giác ABCDE thành tam giác ABE và hình thang vuông EBCD.

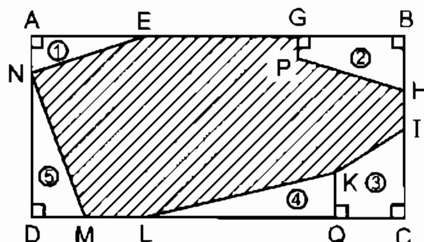
Vẽ đường cao AH của ΔABE. Đo các đoạn thẳng EB, AH, CD, ED (mm).

Tính $S_{ABE} + S_{EBCD}$.



Hình 225

48. (h.226). Vẽ KQ ⊥ CD. Hình chữ nhật ABCD được chia thành ba tam giác vuông ①, ④, ⑤, hai hình thang vuông ②, ③ và hồ nước (phần gạch sọc). Cần đo các đoạn thẳng AE, AN, GB, GP, BH, IC, CQ, KQ, QL, MD, DN, AB, AD.



$S_{\text{hồ nước}} = S_{ABCD} - S_{①} - S_{②} - S_{③} - S_{④} - S_{⑤}$.

Hình 226

Chú ý bản đồ được vẽ với tỉ lệ $\frac{1}{100}$ nên kết quả phải nhân với 10 000.

49. (h.227). Làm tương tự bài 48 nhưng không cần vẽ thêm, không cần đo vì các dữ kiện đã cho sẵn trên hình (đơn vị m).

$S_{ABCD} = (20 + 40) . (40 + 10 + 35) = 5100,$

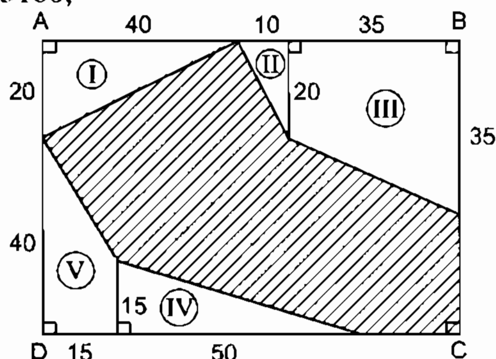
$S_{I} = \frac{1}{2} . 40 . 20 = 400,$

$S_{II} = \frac{1}{2} . 10 . 20 = 100,$

$S_{III} = \frac{1}{2}(20 + 35) . 35 = 962,5,$

$S_{IV} = \frac{1}{2} . 50 . 15 = 375,$

$S_{V} = \frac{1}{2}(15 + 40) . 15 = 412,5,$



Hình 227

$S_{\text{hình gạch sọc}} = 5100 - (400 + 100 + 962,5 + 375 + 412,5) = 2850\ (m^2).$

50. (h.228).

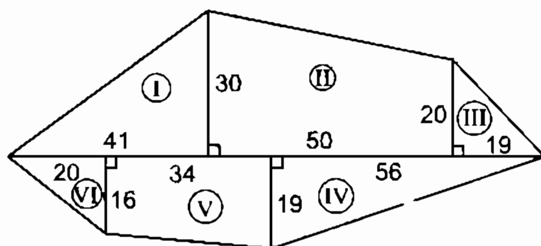
$S_{I} = \frac{1}{2} . 30 . 41 = 615,$

$S_{II} = \frac{1}{2} . (30 + 20) . 50 = 1250,$

$S_{III} = \frac{1}{2} . 19 . 20 = 190,$

$S_{IV} = \frac{1}{2} . 19 . 56 = 532,$

$S_{V} = \frac{1}{2}(19 + 16) . 34 = 595,$



Hình 228

$S_{VI} = \frac{1}{2}.16.20 = 160.$

$S = S_I + S_{II} + S_{III} + S_{IV} + S_V + S_{VI} = 3342(m^2).$

Bài tập bổ sung

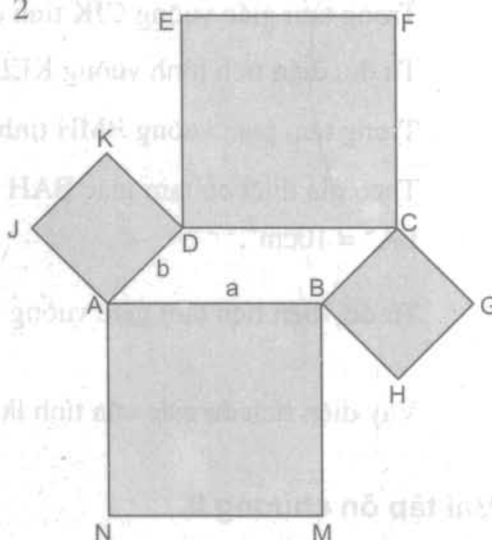
6.1. *HD :* a) Chia đa giác đã cho thành hai hình thang là ADEF và ADCB. Dựa vào công thức diện tích hình thang tính được diện tích mỗi hình đó. Sau đó suy ra diện tích đa giác đã cho là $S = \frac{17}{2}cm^2$.

b) Chia đa giác đã cho thành 3 phần là tam giác vuông DEA, tam giác vuông CFB và hình thang EDCF. Dựa vào công thức diện tích tam giác và hình thang tính được diện tích của mỗi hình đó. Sau đó suy ra diện tích đa giác đã cho là $S' = 54cm^2$.

6.2. *HD :* Xem hình bs.50.

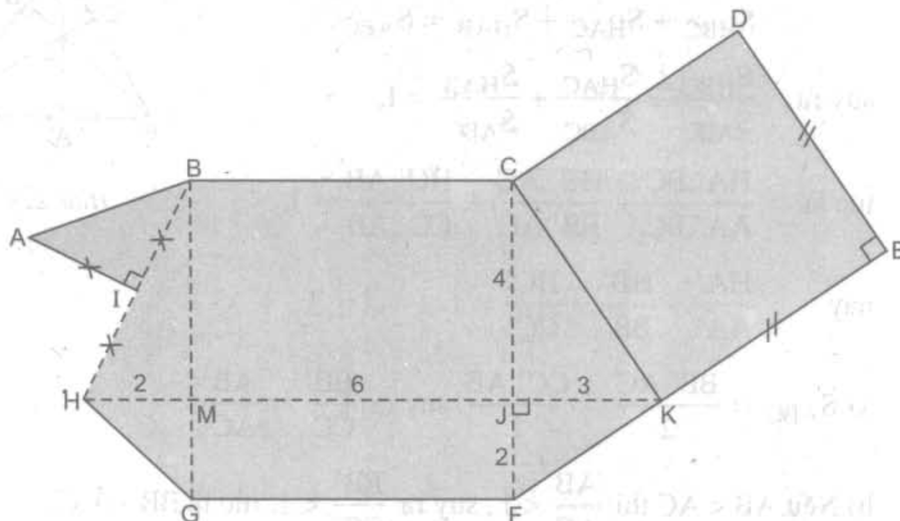
Ta có diện tích của đa giác là :

$S + 2(a^2 + b^2)$.



Hình bs.50

6.3. *HD :* Xem hình bs.51.



Hình bs.51

Chia đa giác đã cho thành hình vuông CKED, hình thang HKFG, hình thang HBCK và tam giác vuông cân BAI.

Diện tích của hình thang HKFG là

$$S_1 = \frac{1}{2}(HK + GF).FJ = \frac{1}{2}(11 + 6).2 = 17\ (cm^2).$$

Diện tích của hình thang HBCK là

$$S_2 = \frac{1}{2}(HK + BC).CJ = \frac{1}{2}(11 + 6).4 = 34\ (cm^2).$$

Trong tam giác vuông CJK tính được CK = 5cm.

Từ đó, diện tích hình vuông KEDC là $S_3 = 25cm^2$.

Trong tam giác vuông BMH tính được $BH^2 = 2^2 + 4^2 = 20\ (cm^2)$.

Theo giả thiết có tam giác BAH vuông cân (đỉnh A) nên $2BA^2 = BH^2$, suy ra $BA^2 = 10cm^2$.

Từ đó, diện tích tam giác vuông BAI là $S_4 = \frac{1}{4}BA^2 = \frac{5}{2}cm^2$.

Vậy diện tích đa giác cần tính là $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{157}{2}cm^2$.

Bài tập ôn chương II

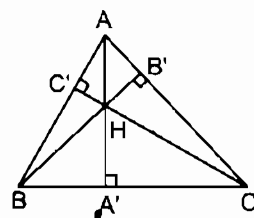
51. (h.229). Ta có :

$$S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB} = S_{ABC},$$

suy ra $\dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = 1,$

tức là $\dfrac{HA'.BC}{AA'.BC} + \dfrac{HB'.AC}{BB'.AC} + \dfrac{HC'.AB}{CC'.AB} = 1,$

hay $\dfrac{HA'}{AA'} + \dfrac{HB'}{BB'} + \dfrac{HC'}{CC'} = 1.$



Hình 229

52. a) $S_{ABC} = \dfrac{BB'.AC}{2} = \dfrac{CC'.AB}{2}$ suy ra $\dfrac{BB'}{CC'} = \dfrac{AB}{AC}$.

b) Nếu AB < AC thì $\dfrac{AB}{AC} < 1$, suy ra $\dfrac{BB'}{CC'} < 1$, tức là BB' < CC'.

53. (h.230). Gọi O là tâm hình vuông ABCD cạnh a ; M và N là hai giao điểm của đường thẳng l với các cạnh AB, CD ; h_1 và h_2 lần lượt là các khoảng cách từ hai đỉnh B, A đến l ; s là tổng các khoảng cách cần tìm.

Dể chứng minh AM = CN (đối xứng qua O),

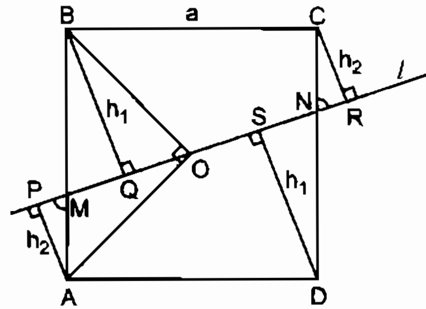
$\widehat{AMP} = \widehat{CNR}$ (hai góc nhọn có cạnh tương ứng song song).

Do đó $\Delta AMP = \Delta CNR$.

Vậy $AP = CR = h_2$.

Tương tự, ta có $BQ = DS = h_1$.

Để tính $h_1 + h_2$, ta tính S_{OAB} theo hai cách khác nhau



Hình 230

$$S_{OAB} = \frac{1}{4}a^2, \qquad (1)$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{4}b(h_1 + h_2). \qquad (2)$$

So sánh (1) và (2), ta có $h_1 + h_2 = \dfrac{a^2}{b}$.

Vậy $s = 2(h_1 + h_2) = \dfrac{2a^2}{b}$.

54. (h.231). Hình thang ABMN có hai đường chéo vuông góc. Vậy :

$$S_{ABMN} = \frac{1}{2}AM.BN.$$

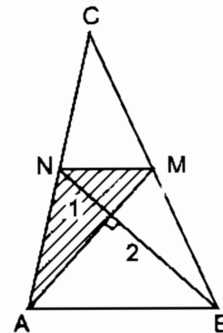
Mặt khác, $S_{ABMN} = \dfrac{3}{4}S_{ABC}$, vì nếu đặt $S_1 = S_{AMN}$, $S_2 = S_{ABM}$ thì :

$$S_1 = \frac{1}{4}S_{ABC}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}S_{ABC}$$

$$\overline{S_{ABMN} = S_1 + S_2 = \frac{3}{4}S_{ABC}}.$$

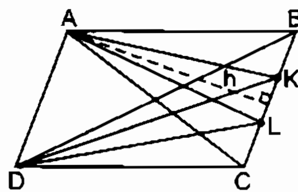
Suy ra : $S_{ABC} = \dfrac{4}{3}S_{ABMN} = \dfrac{2}{3}AM.BN.$



Hình 231

55. (h.232). $S_{ACD} = S_{BCD} = S_{DAB} = S_{CAB} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ (1)

(vì có chiều cao bằng nhau và đáy bằng nhau). Mặt khác, ta lại có :



Hình 232

$S_{ABK} = S_{AKL} = S_{ALC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$ (2)

(vì có chiều cao h và có đáy $BK = KL = LC = \frac{1}{3}BC$).

Tương tự : $S_{DBK} = S_{DKL} = S_{DLC} = \frac{1}{3}S_{DBC}$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra :

$$S_{ABK} = S_{AKL} = S_{ALC} = S_{DBK} = S_{DKL} = S_{DLC}. \quad (4)$$

Từ (1) và (4), ta tính được các tỉ số sau đây :

a) $\frac{S_{DAC}}{S_{DCK}} = \frac{\frac{1}{2}S_{ABCD}}{\frac{2}{6}S_{ABCD}} = \frac{3}{2}$.

b) $\frac{S_{DAC}}{S_{ADLB}} = \frac{\frac{1}{2}S_{ABCD}}{S_{ABCD} - \frac{1}{6}S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}S_{ABCD}}{\frac{5}{6}S_{ABCD}} = \frac{3}{5}$.

c) $\frac{S_{ABKD}}{S_{ABLD}} = \frac{\frac{1}{2}S_{ABCD} + \frac{1}{6}S_{ABCD}}{\frac{1}{2}S_{ABCD} + \frac{2}{6}S_{ABCD}} = \frac{\frac{4}{6}S_{ABCD}}{\frac{5}{6}S_{ABCD}} = \frac{4}{5}$.

56. (h.233).

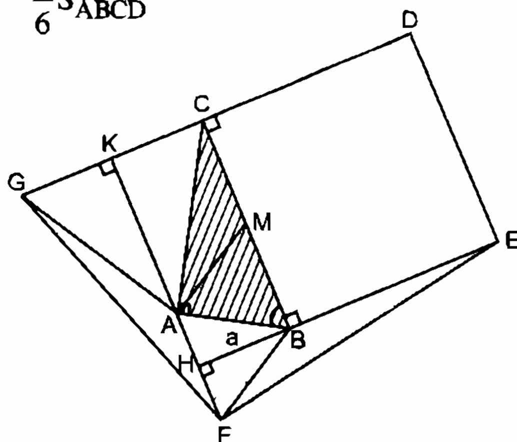
a) Giả sử M là trung điểm của BC, ΔABM là tam giác đều nên $\widehat{ABC} = 60^o$.

Từ đó suy ra : $\widehat{BCA} = 30^o$.

Theo định lí Py-ta-go, ta có :

$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$

$= \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.



Hình 233

Do đó, ta có :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}. \quad (1)$$

b) Vì $\widehat{FAB} = \widehat{ABC}$ $(= 60^o)$ nên FA // BC (hai góc so le trong), từ đó suy ra FA vuông góc với BE và CG.

Gọi giao điểm của FA và BE là H, giao điểm của FA và CG là K. Ta có :

$$S_{FAG} = \frac{1}{2}FA.GK = \frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}, \quad (2)$$

$$S_{FBE} = \frac{1}{2}BE.FH = \frac{1}{2}.2a.\frac{a}{2} = \frac{1}{2}a^2. \quad (3)$$

c) $S_{BCDE} = 4a^2$, (4)

$$S_{ABF} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}, \quad (5)$$

$$S_{ACG} = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}. \quad (6)$$

Từ (1), (2), (3), (4), (5), (6), ta có :

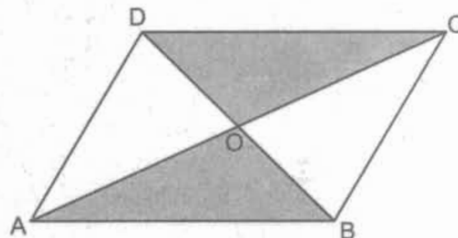
$$S_{DEFG} = \frac{a^2}{4}(18 + 7\sqrt{3}) \approx 7,53a^2.$$

Bài tập bổ sung

II.1. *HD* : Xem hình bs.52.

– Các tam giác ADB, ACB, DAC, DBC có diện tích bằng nhau vì cùng bằng nửa diện tích hình bình hành đã cho.

– Các tam giác OAD, OCB, ODC, OBA có diện tích bằng nhau vì cùng bằng một phần tư diện tích hình bình hành đã cho.



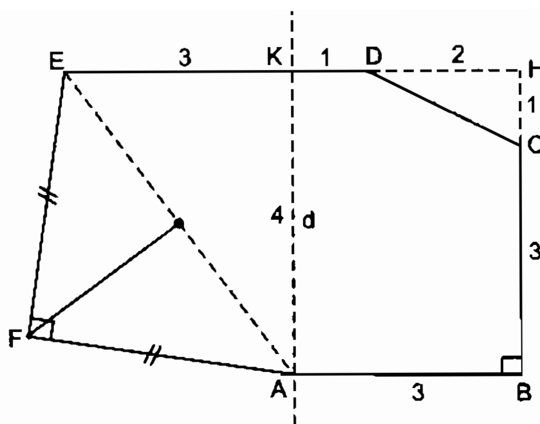
Hình bs.52

II.2. *HD* : Xem hình bs.53.

Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng ED và BC. Khi đó, ABHE là hình thang và tính được diện tích của nó là

$$S_1 = \frac{1}{2}(AB + EH).BH$$

$$= \frac{1}{2}(3 + 6).4 = 18\ (cm^2).$$



Hình bs.53

Diện tích của tam giác vuông DHC là $S_2 = \frac{1}{2}DH.CH = \frac{1}{2}.2.1 = 1\ (cm^2)$.

Trong tam giác vuông AKE tính được EA = 5 (cm).

Trong tam giác vuông FEA có FE = FA suy ra $EF^2 = \frac{25}{2}$.

Từ đó diện tích của tam giác FAE là $S_3 = \frac{25}{4}cm^2$.

Vậy diện tích của lục giác đã cho là

$$S = S_3 + S_1 - S_2 = \frac{25}{4} + 18 - 1 = \frac{93}{4}\ (cm^2).$$

HD :

Bài số	II. 3	II. 4	II. 5	II. 6	II. 7	II. 8	II. 9	II. 10	II. 11
Đáp án	(C)	(D)	(A)	(B)	(D)	(C)	(A)	(C)	(B)

MỤC LỤC

PHẦN HÌNH HỌC

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **NGUYỄN QUÝ THAO**

Biên tập lần đầu : **PHẠM BẢO KHUÊ - NGUYỄN TRỌNG THIỆP**
Biên tập tái bản : **NGUYỄN TRỌNG THIỆP**
Biên tập kĩ thuật và trình bày : **NGUYỄN THANH THUÝ – TRẦN THANH HẰNG**
Trình bày bìa : **BÙI QUANG TUẤN**
Sửa bản in : **NGUYỄN TRỌNG THIỆP**
Chế bản : **CÔNG TY CP THIẾT KẾ VÀ PHÁT HÀNH SÁCH GIÁO DỤC**

BÀI TẬP TOÁN 8 - TẬP MỘT

Mã số : 2B803T1

In 100.000 cuốn; (ST); khổ 17x24cm.
In tại Công ty cổ phần In Bắc Giang.
Số in: 04. Số xuất bản: 01-2011/CXB/766-123/GD.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 01 năm 2011.





SÁCH BÀI TẬP LỚP 8

1. Bài tập Ngữ văn 8 (tập một, tập hai)
2. Bài tập Toán 8 (tập một, tập hai)
3. Bài tập Vật lí 8
4. Bài tập Hoá học 8
5. Bài tập Tiếng Anh 8
6. Bài tập Tiếng Pháp 8
7. Bài tập Tiếng Nga 8

Bạn đọc có thể mua sách tại :

- Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương.
- Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội, 187B Giảng Võ, TP. Hà Nội.
- Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam, 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. HCM.
- Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng, 15 Nguyễn Chí Thanh, TP. Đà Nẵng.

hoặc các cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam :

– Tại TP. Hà Nội : 187 Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 23 Tràng Tiền ; 25 Hàn Thuyên ; 32E Kim Mã ; 14/3 Nguyễn Khánh Toàn ; 67B Cửa Bắc.
– Tại TP. Đà Nẵng : 78 Pasteur ; 247 Hải Phòng.
– Tại TP. Hồ Chí Minh : 104 Mai Thị Lựu ; 2A Đinh Tiên Hoàng, Quận 1 ; 240 Trần Bình Trọng ; 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5.
– Tại TP. Cần Thơ : 5/5 Đường 30/4.
– Tại Website bán sách trực tuyến : www.sach24.vn

Website: www.nxbgd.vn





***Giá:* 13.100đ**